アファイン群スキームと Hopf 代数

京都大学数理解析研究所　佐久川憲児

目次

1 導入

本稿ではアファイン群スキームと Hopf 代数についての基本事項と例を述べる．以下では圏や函手の自然変換等の定義についての知識は仮定して話を進める．付録付録 A に基礎事項をまとめているので, 適宜参考されたい.

2 群函手

Grp によって群のなす圏を表すことにする．即ち, 対象は群であり, その間の射は群準同型とする．また, 簡単のために体 k を固定しておき, Alg_k で**可換な** k 代数のなす圏を表すことにする.

定義 2.1. Alg_k 上の**群函手**とは, Alg_k から Grp への函手

$$G\colon \mathrm{Alg}_k \to \mathrm{Grp}$$

のこととする.

例 2.2. (1) Alg_k 上の群函手

$$\mathbf{G}_{\mathrm{a},k}\colon \mathrm{Alg}_k \to \mathrm{Grp}$$

を対応

$$\mathbf{G}_{\mathrm{a},k}(A) := (A, +)$$

で定める．ここで, $f\colon A \to B$ を任意の可換 k 代数の射としたとき, 対応する写像 $\mathbf{G}_{\mathrm{a}.,k}(f)$ は $f\colon A \to B$ そのものをとる．これはしばしば**加法群** *(additive group)* と呼ばれる．

(2) n を非負整数とするとき, Alg_k 上の群函手

$$\mathrm{GL}_{n,k}\colon \mathrm{Alg}_k \to \mathrm{Grp}$$

を, 対応

$$\mathrm{GL}_{n,k}(A) := \{A \text{ に成分を持つ可逆な } n \text{ 次正方行列 }\}$$

で定める．群構造は行列の積で定める．ここで, $f\colon A \to B$ を任意の可換 k 代数の射としたとき, 対応する写像 $\mathrm{GL}_{n,k}(f)$ は, f を行列の各成分について施すことによって得られる写像

$$\mathrm{GL}_{n,k}(f)\colon \mathrm{GL}_{n,k}(A) \to \mathrm{GL}_{n,k}(B); \quad (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \mapsto (f(a_{ij}))_{1\le i,j\le n}$$

とする．また, $n = 0$ の場合は定義式の右辺は常に単位元のみからなる群であると理解することにする．$n = 1$ の時, $\mathrm{GL}_{1,k}$ はしばしば $\mathbf{G}_{\mathrm{m},k}$ と書かれ, **乗法群** *(multiplicative group)* と呼ばれる．

演習 2.3. 実際に上の対応が群函手を与えることを示せ.

3 アファイン群スキーム

あまり一般的でない定義ではあるが, 本稿ではアファイン群スキームとは特別な群函手とみなすことにする（スキームの通常の定義については付録 B を参照されたい）．一般に可換 k 代数 A が与えられたとき, Alg_k から集合の圏 Set への函手 $\mathrm{Spec}(A)$ を[*1],

$$\mathrm{Spec}(A)\colon \mathrm{Alg}_k \to \mathrm{Set}; \quad B \mapsto \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A, B)$$

で定める．ここで, k 代数の射 $f\colon B \to C$ に対して $\mathrm{Spec}(A)$ で対応する射 $\mathrm{Spec}(A)(f)$ は

$$\mathrm{Spec}(A)(f)\colon \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A, C); \quad g \mapsto f \circ g$$

[*1] 実際には基礎体 k に依存するので $\mathrm{Spec}_k(A)$ と書くべきではあるが, ここでは省略している．実際省略しても問題が発生しないことの証明は読者の演習としたい.

で定めている.

定義 3.1. k 上の**アファイン群スキーム**とは, Alg_k 上の群函手 G であって, ある可換 k 代数 A が存在し, Alg_k から集合の圏への函手の間の同値

$$G \cong \mathrm{Spec}(A)$$

が存在するようなもののことをさす. このとき G は A で**表現される**という.

例 3.2. 例 2.2 において定義された群函手 $\mathbf{G}_{\mathrm{a},k}$ と $\mathrm{GL}_{n,k}$ は k 上のアファイン群スキームであることを示そう.

まず, $\mathbf{G}_{\mathrm{a},k}$ から見てみると, 一変数多項式環 $k[t]$ は $\mathbf{G}_{\mathrm{a},k}$ を表現する. 実際任意の k 代数 A に対して函手的な集合の同型

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(k[t], A) \xrightarrow{\sim} A; \quad f \mapsto f(t)$$

が存在するからである.

次に $\mathrm{GL}_{n,k}$ を見てみよう. 環 R を

$$R := k\left[X_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\right]\left[\det^{-1}\right]$$

で定義する. ただし, $\mathfrak{S}_n$ を n 次対称群で $\mathrm{sgn}\colon \mathfrak{S}_n \to \{1, -1\}$ をサイン指標としたとき, det は以下の式で定義される多項式とする:

$$\det := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) X_{1\sigma(1)} \cdots X_{n\sigma(n)}.$$

A を可換 k 代数としたとき, det が X_{ij} たちの多項式であるので, 任意の R から A への k 代数準同型

$$f\colon R \to A$$

は X_{ij} たちの行き先 $\{f(X_{ij})\}_{1 \leq i,j \leq n}$ だけで一意的に定まる. また det の定義から, 行列 $(f(X_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$ は A に成分を持つ n 次正方可逆行列となっている. 以上から, 単射

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(R, A) \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n,k}(A); \quad f \mapsto (f(X_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n} \tag{1}$$

を得る. 逆に可逆行列 $M = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_{n,k}(A)$ が与えられているとき, 射 $f_M\colon R \to A$ を $f_M(X_{ij}) = a_{ij}$ で定めると, f_M が well-defined であり対応 $M \mapsto f_M$ が (1) の逆写像となっていることは明らかであろう. 更に, これらの対応は明らかに A に対して函手的であるので, (1) は自然同値

$$\mathrm{Spec}(R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_{n,k}$$

を定義することが分かった. 即ち, $\mathrm{GL}_{n,k}$ はアファイン群スキームであり, k 代数 R は $\mathrm{GL}_{n,k}$ を表現している.

A, B を二つの可換 k 代数とするとき, $i_A\colon A \to A \otimes_k B$, $i_B\colon B \to A \otimes_k B$ を自然な k 代数の射とする．テンソル積の普遍性から任意の可換 k 代数 C に対して自然な写像

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A \otimes_k B, C) \to \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A, C) \times \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(B, C); \quad f \mapsto (f \circ i_A, f \circ i_B)$$

は一対一写像であることがわかる．この写像は明らかに C に対して函手的なので, Alg_k から集合の圏への函手の間の自然同値

$$\mathrm{Spec}(A \otimes_k B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(A) \times \mathrm{Spec}(B) \tag{2}$$

が得られる．一般に可換 k 代数の射 $f\colon A \to B$ が与えられているとき, 自然変換

$$\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A) \tag{3}$$

が環準同型たちを f で引き戻す写像のあつまりとして定義できることに注意しておく．

さて, G を Alg_k 上の群函手としたとき, 定義から G は自然変換

$$\mathrm{prod}_G\colon G \times G \to G, \quad \mathrm{e}_G\colon \{*\} \to G, \quad \mathrm{inv}_G\colon G \xrightarrow{\sim} G \tag{4}$$

が備わっている (それぞれ積, 単位元, 逆元に対応している)．G がアファイン群スキーム $\mathrm{Spec}(A)$ であるとき, (4) はそれぞれ自然変換

$$\begin{aligned} &\mathrm{prod}_{\mathrm{Spec}(A)}\colon \mathrm{Spec}(A \otimes_k A) \to \mathrm{Spec}(A), \quad \mathrm{e}_{\mathrm{Spec}(A)}\colon \mathrm{Spec}(k) \to \mathrm{Spec}(A), \\ &\quad \mathrm{inv}_{\mathrm{Spec}(A)}\colon \mathrm{Spec}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(A) \end{aligned} \tag{5}$$

を誘導する．ここで, $\mathrm{Spec}(k)$ は常に一点からなる群を返す函手と同一視できることに注意しておこう．

補題 3.3 (米田の補題の非常に特殊な場合, 定理 10 参照)**.** $G = \mathrm{Spec}(A)$ をアファイン群スキームとする．このとき自然変換 (5) たちはそれぞれ可換 k 代数の射

$$\mathrm{prod}^{\vee}_{\mathrm{Spec}(A)}\colon A \to A \otimes_k A, \quad \mathrm{e}^{\vee}_{\mathrm{Spec}(A)}\colon A \to k, \quad \mathrm{inv}^{\vee}_{\mathrm{Spec}(A)}\colon A \xrightarrow{\sim} A$$

から誘導されている (対応 (3) を参照)．それぞれ, **余積**, **余単位元**, **余逆元**と呼ぶ.

例 3.4. $\mathbf{G}_{\mathrm{a},k} \cong \mathrm{Spec}(k[t])$ であることと上の補題から $k[t]$ には余積, 余単位, 余逆元が定まるが, 具体的には以下のようにかける:

$$\begin{aligned} &\mathrm{prod}^{\vee}\colon k[t] \to k[t] \otimes_k k[t]; t \mapsto 1 \otimes t + t \otimes 1, \quad \mathrm{e}^{\vee}\colon k[t] \to k; t \mapsto 0, \\ &\quad \mathrm{inv}^{\vee}\colon k[t] \to k[t]; t \mapsto -t. \end{aligned} \tag{6}$$

次に, $\mathrm{GL}_{n,k}$ を考えることにし, R を例 3.2 で定めた $\mathrm{GL}_{n,k}$ を表現する可換 k 代数とする．このとき, 余積 $R \to R \otimes_k R$ は対応

$$X_{ij} \mapsto \sum_{l=1}^{n} X_{il} \otimes X_{lj}$$

で, 余単位元 $R \to k$ は対応

$$X_{ij} \mapsto \delta_{ij}$$

により与えられることが例 3.2 で見た具体的な対応よりわかる. 余逆元は多少 TEX で書くのが面倒であるので, 読者への演習問題とする.

可換な k-Hopf 代数とは, 上で見たような余積, 余単位元, 余逆元を備え付けられている可換 k 代数のことである. 即ち, 若干正確性に欠けるが, 可換 k-Hopf 代数とは,

組 $(A, \mathrm{prod}^\vee, \mathrm{e}^\vee, \mathrm{inv}^\vee)$ でありそれらがアファイン群スキームを表現するもの

として定義できる. しかしながら, 余積, 余単位元, 余逆元は何でもよいわけではなく, 当然群が満たすべき公理と整合性がとれていなくてはならない（例えば結合法則）. 次の章でより正確な定義を与えることにしよう.

4 Hopf 代数の定義

定義 4.1. R を単位元を持つ**必ずしも可換とは限らない** k 代数とする.

(1) R 上の**余積**とは, k 代数の射

$$\Delta\colon R \to R \otimes_k R$$

であって, 次の図式を可換とするものである (余結合法則図式):

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & R \otimes_k R \arrow[d, "\mathrm{id}_R \otimes \Delta"] \\ R \otimes_k R \arrow[r, "\Delta \otimes \mathrm{id}_R"] & R \otimes_k R \otimes_k R. \end{tikzcd}$$

k 代数 R と R 上の余積 Δ の組 (R, Δ) のことを, **双代数**と呼ぶ.

(2) (R, Δ) を双代数としたとき, これの**余単位元**とは, k 代数の射 $\varepsilon\colon R \to k$ であって, 二つの合成写像

$$R \xrightarrow{\Delta} R \otimes_k R \xrightarrow{\mathrm{id}_R \otimes \varepsilon} R, \quad R \xrightarrow{\Delta} R \otimes_k R \xrightarrow{\varepsilon \otimes \mathrm{id}_R} R$$

がともに恒等写像となるもののことをさす. 組 (R, Δ, ε) のことを余単位的双代数と呼ぶことにする.

(3) (R, Δ, ε) を**余単位的双代数**とする. このとき, (R, Δ, ε) 上の**余逆元（アンチポード）**とは, k 代数の射

$$\iota\colon R \xrightarrow{\sim} R$$

であって, 合成 $(\mathrm{id}_R \otimes \iota) \circ \Delta$, $(\iota \otimes \mathrm{id}_R) \circ \Delta$ がそれぞれ

$$R \xrightarrow{\varepsilon} k \to R$$

という分解を持つようなもののことをさす．ここで, 最後の射は k 代数 R の構造射のこととする.

(1), (2), (3) を満たすような四つ組 $(R, \Delta, \varepsilon, \iota)$ のことを, ***k-Hopf* 代数**と呼ぶ．R が可換 k 代数であるとき, **可換 *k-Hopf* 代数**と呼ぶ[*2].

記号の省略のために, 四つ組 $(R, \Delta, \varepsilon, \iota)$ 全てではなく R のみで Hopf 代数を表すことにする．R を k-Hopf 代数としたとき, $R^\vee := \mathrm{Hom}_k(R, k)$ と置くとこれもまた Hopf 代数構造を持つ．これを双対 Hopf 代数と呼ぶことにする.

5 Hopf 代数の例

5.1 群環

G を群としたとき, **群環** $k[G]$ をシンボル $[g]$, $g \in G$ で自由生成される k ベクトル空間として定義する:

$$k[G] := \bigoplus_{g \in G} k[g].$$

定義から $k[G]$ は k ベクトル空間であるが, その上に積を

$$\left(\sum_{g \in G} a_g\right)\left(\sum_{g \in G} b_g[g]\right) := \sum_{g \in G}\left(\sum_{hk=g} a_h a_k\right)[g]$$

で定めると, $k[G]$ は単位的で結合的 k 代数である（単位元は $[e]$）．$k[G]$ 上に余積 Δ を

$$\Delta\left(\sum_g a_g[g]\right) := \sum_g a_g[g] \otimes [g]$$

で, 次に余単位元 ε を

$$\varepsilon\left(\sum_g a_g[g]\right) := \sum_g a_g$$

で, 最後に余逆元 ι を

$$\iota\left(\sum_g a_g[g]\right) := \sum_g a_g[g^{-1}]$$

で定義すると, これらは定義 4.1 の条件を満たし, $k[G]$ は k-Hopf 代数となることがわかる（演習とする）．定義から G が非可換群であるならば, $k[G]$ は非可換な Hopf 代

[*2] Hopf k-algebra なので本当は Hopf k-代数の方が良いとは思うが, 少し字面が良くないので今回はこちらを採用している.

数であるが, その双対 Hopf 代数 $k[G]^\vee$ は常に可換 Hopf 代数である. 従ってこの可換 Hopf 代数は何かアファイン群スキームと対応するはずであるが, それは任意の既約な可換 k 代数 A に対して群 G を返す定数群函手となる. 即ち,

$$G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(k[G]^\vee, A); \quad g \mapsto ([g']^\vee \mapsto \delta_{g,g'})$$

が任意の既約な可換 k 代数 A で成立する.

5.2 Malcev 完備化 (冪単完備化)

この小節では少し難しい例を見る. ほとんど証明がついていないが, 腕に自信がある読者は証明を自ら試みてほしい[*3].

π を有限生成な群とし, J で群環 $\mathbf{Q}[\pi]$ の添加イデアル（augmentation ideal）を表すことにする:

$$J := \mathrm{Ker}\left(\mathbf{Q}[\pi] \to \mathbf{Q}; \quad [g] \mapsto 1\right).$$

このとき, π の $\mathbf{Q}$ 上の完備群環 $\mathbf{Q}[\![\pi]\!]$ を射影極限

$$\mathbf{Q}[\![\pi]\!] := \varprojlim_n \mathbf{Q}[\pi]/J^{n+1} \tag{7}$$

で定める. さて, $\mathbf{Q}[\pi]/J^{n+1}$ に離散位相を入れ, (7) による逆極限位相を $\mathbf{Q}[\![\pi]\!]$ に導入することにしよう. すると. 前小節に於いて定めた積, 余積, 余単位元はそれぞれ $\mathbf{Q}[\![\pi]\!]$ に連続写像として伸びることが示せる (演習). さて, Hopf 代数 R を完備群環 $\mathbf{Q}[\![\pi]\!]$ の位相 $\mathbf{Q}$ 双対として定義する. 具体的な下部 $\mathbf{Q}$ ベクトル空間は

$$R := \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Q}[\![\pi]\!], \mathbf{Q}) \cong \varinjlim_n \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}[\pi]/J^{n+1}, \mathbf{Q})$$

で表せられる. π の *Malcev* **完備化**, **又は冪単完備化** $\pi_{\mathbf{Q}}$, とはこの可換 Hopf 代数に対応する $\mathbf{Q}$ 上のアファイン群スキームのことをさす:

$$\pi_{\mathbf{Q}} := \mathrm{Spec}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Q}[\![\pi]\!], \mathbf{Q})).$$

π の元を $\mathbf{Q}[\![\pi]\!]$ の連続双対に代入するという対応は群準同型

$$\pi \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}\text{-alg}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Q}[\![\pi]\!], \mathbf{Q}), \mathbf{Q}) = \pi_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}) \tag{8}$$

を定めている. Malcev 完備化と (8) の意味を考えてみる. 任意の非負整数 n に対し, R の部分環 R_n を, $\mathbf{Q}$ 上 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}[\pi]/J^{n+1}, \mathbf{Q})$ の像で生成されるものとする[*4]. すると, R_n には自然に R の部分 Hopf 代数の構造が入り, それから定まるアファイン

[*3] 実際にはほとんど全ての証明が淡中圏の理論の見地から自然に導かれる.

[*4] $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}[\pi]/J^{n+1}, \mathbf{Q})$ 自体は R の部分環にならない事に注意しよう.

群スキームを $\pi_{\mathbf{Q}}^n$ と書くことにする. このとき, 自然な射 $R_n \to R$ から誘導される射 $\pi_{\mathbf{Q}} \to \pi_{\mathbf{Q}}^n$ は全射となっていることが示せる:

$$\pi_{\mathbf{Q}}^1 \twoheadleftarrow \pi_{\mathbf{Q}}^2 \twoheadleftarrow \pi_{\mathbf{Q}}^3 \twoheadleftarrow \cdots \twoheadleftarrow \pi_{\mathbf{Q}}^n \twoheadleftarrow \cdots \pi_{\mathbf{Q}} \cong \varprojlim_n \pi_{\mathbf{Q}}^n.$$

更に任意の n に対して $\mathrm{Ker}(\pi_{\mathbf{Q}}^n \twoheadrightarrow \pi_{\mathbf{Q}}^{n-1})$ は加法群 $\mathbf{G}_{\mathrm{a},\mathbf{Q}}$ の有限直積となっていることも証明できる (演習). 一般的に $\mathbf{G}_{\mathrm{a},\mathbf{Q}}$ の有限回の拡大として書けるアファイン群スキームのことを, **冪単代数群**と呼ぶのであるが, 上の列は各 $\pi_{\mathbf{Q}}^n$ が $\mathbf{Q}$ 上の冪単アファイン群スキームであることを意味している. 即ち, その射影極限である $\pi_{\mathbf{Q}}$ は副冪単代数群である.

命題 5.1. $\pi_{\mathbf{Q}}$ は π を最も良く近似する $\mathbf{Q}$ 上の副冪単代数群である. 即ち, $\mathbf{Q}$ 上の副冪単代数群 G と像が Zariski 位相に関して稠密であるような群準同型 $\pi \to G(\mathbf{Q})$ が与えられたとき, 副冪単代数群の射 $F\colon \pi_{\mathbf{Q}} \to G$ であって以下の図式を可換とするものが一意的に存在する:

$$\begin{tikzcd}
\pi \arrow[r] \arrow[dr] & \pi_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}) \arrow[d, "F"] \\
 & G(\mathbf{Q}).
\end{tikzcd}$$

この命題こそが, $\pi_{\mathbf{Q}}$ が π の冪単完備化と呼ばれる所以である.

実は本サマースクールに於いて最も良く現れる Hopf 代数がこのタイプのものである. 例えば山本氏の講演に於いては π として $X = \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の位相的基本群 $\pi_1(X, v)$ をとってその冪単完備化を考える. 但し v は接ベクトル基点 0_1 のこととしている (山本氏の講演レジュメ参照. また接ベクトル基点の一般論については [1] 参照.). $\pi_1(X, v)$ は 2 元生成な自由群であることが知られており, 更に標準的な生成元 $\{x, y\}$ の取り方がある (下の図を参照). このとき $\pi_1(X, v)$ の $\mathbf{Q}$ 上の完備群環は非可換形式的べき級数環 $\mathbf{Q}\langle\langle X, Y\rangle\rangle$ と同型となる:

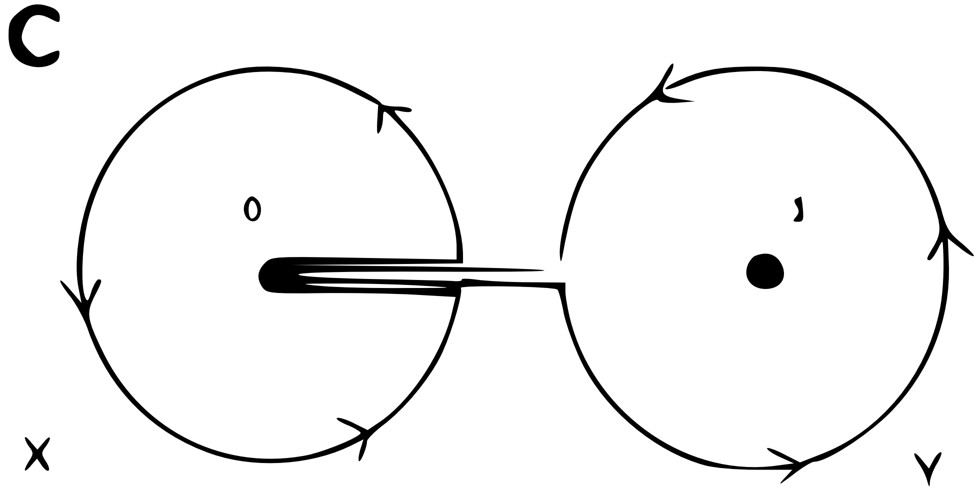
$$\mathbf{Q}[\![\pi_1(X, v)]\!] = \mathbf{Q}\langle\langle X, Y\rangle\rangle$$

但し $X = \log(x) := \sum_{n=1}(-1)^{n-1}(x-1)/n,\ Y := \log(y)$. 従ってその位相双対はいわゆる *Hoffman* **代数**[*5]と自然に同型である

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Q}\langle\langle X, Y\rangle\rangle, \mathbf{Q}) \cong \mathbf{Q}\langle e_0, e_1\rangle.$$

この $\pi_{\mathbf{Q}}$ を $\pi_1^{\mathrm{un}}(X, v)$ と書き, 冪単基本群と呼ぶ. この関数環が（non-canonical ではあるが） 山本氏の講演に現れる ${}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}}^{\mathrm{B}}$ と同型となっている. $\pi_1^{\mathrm{un}}(X, v)$ には以下のよう

[*5] 個人的にはこのような唯の Hopf 代数に個人名をつけるのは大仰で好きでない.



な幾何的背景からくる淡中基本群解釈もある (淡中圏については [2] 参照). $X(\mathbf{C})$ 上の $\mathbf{Q}$ **局所系**とは, 位相空間 $X(\mathbf{C})$ 上の有限次元 $\mathbf{Q}$ ベクトル空間のなす局所定数層のことである. それらのなす圏を $\mathrm{LS}(X)$ と書くことにする. この圏は $\mathbf{Q}$ 線型ニュートラル淡中圏となり, 接ベクトル基点 v が定めるファイバー函手を基点に持つ淡中基本群と冪単基本群が自然に同型となる:

$$\pi_1^{\mathrm{un}}(X, v) = \pi_1(\mathrm{LS}(X), v).$$

このように, 淡中基本群が副冪単代数群となるような淡中圏のことを**冪単淡中圏**という. このような圏は幾何的な状況下で良く現れるが, その場合その淡中基本群は**バー構成**と呼ばれるコホモロジー的構成を持つ. 一般論については [5, Section 2,3] を参照されたい.

5.3 Lie 環とその普遍包絡環

$\mathfrak{g}$ を k 上の Lie 環とする. 即ち $\mathfrak{g}$ は k ベクトル空間に Lie 括弧積

$$[\ ,\ ]\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

が備え付けられているものとする. 簡単に思い出しておくと, Lie 括弧積とは k 双線型写像であって反射律

$$[X, X] = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

とヤコビ律

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

を満たすもののことである. 例えば $\mathrm{M}_n(k)$ を k を成分に持つ n 次正方行列のなす集合としたとき, 二つの行列 M_1, M_2 に対して括弧積 $[M_1, M_2]$ を

$$[M_1, M_2] := M_1 M_2 - M_2 M_1$$

で定めるとこれは反射律とヤコビ律を満たすことが分かる　(実は $\mathrm{M}_n(k)$ でなくとも, 任意の結合代数で良い).

一般に k ベクトル空間 V が与えられたとき, そのテンソル代数 $T(V)$ を

$$T(V) := \bigoplus_{m\geq 0} V^{\otimes m}$$

で定める．ここで積は $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m)(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n) := v \otimes \cdots \otimes v_m \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_n$ で定めている．さて, k 上の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が与えられたとき, その普遍包絡環 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ を

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/(X \otimes X' - X' \otimes X - [X, X']|X, X' \in \mathfrak{g})$$

で定める．但し, $(X \otimes X' - X' \otimes X - [X, X']|X, X' \in \mathfrak{g})$ は $X \otimes X' - X' \otimes X - [X, X']$ で生成される $T(\mathfrak{g})$ の両側イデアルとする．一般に $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ は非可換環となっている．

さて, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 上に余積 Δ, 余単位元 ε, 余逆元 ι を

$$\begin{aligned} \Delta\colon \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_k \mathcal{U}(\mathfrak{g}); &\quad X \mapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X \\ \varepsilon\colon \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to k; &\quad X \mapsto 0, \\ \iota\colon \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}(\mathfrak{g}); &\quad X \mapsto -X\ (\forall X \in \mathfrak{g}) \end{aligned} \tag{9}$$

で定義する．この写像達は well-defined であることが容易に示され, また定義 4.1 の条件を満たすことも証明できる．

付録 A　米田の補題

この付録では米田の補題を思い出す[*6].

まず簡単に圏にまつわる基本概念を復習しよう．集合論的に面倒となる部分を避けるために, この原稿では宇宙と呼ばれる, 集合論がその中で展開できるような巨大な集合 $\mathcal{U}$ を一つ固定している ([4, Definition 1.1.1])．例えば集合の圏 Set を既に以前扱っていたが, 実際のところこの原稿では $\mathcal{U}$ に属する集合と同型ととなる集合だけを考えている[*7]．このような集合のことを $\mathcal{U}$-小集合と呼ぶ．こうすると, Set の対象全体が集合となり, 多少集合論的に面倒な議論をさけることができるのである[*8]. $\mathcal{U}$-圏とは, 対象と呼ばれる集合 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ と, 二つの対象 $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ に対し, 射と呼ばれる $\mathcal{U}$-小集合 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ たちのあつまりであって, 二つの合成可能な射 $f\colon X \to Y,\ g\colon Y \to Z$ があればただ一つ合成射 $g \circ f\colon X \to Z$, が定まっているよう

[*6] この補題は, 補題というにはあまりにも重要であり, 例えば有名な教科書 [4] に於いて著者たちは, 「この補題は圏論の礎石である」とまで言い切っている．

[*7] 従って, 本当は $\mathcal{U}$-Set と書くべきである．[4, Deefinition 1.1.2] 参照.

[*8] しかし一般的には $\mathcal{U}$ 小集合でないことに注意する．

なもののことである ([4, Definition 1.2.1]). 以下では $\mathcal{U}$-圏のことを単に圏とよぶことにしよう.

例 付録 A.1. (1) Set で集合のなす圏を表すことにする. 対象は $\mathcal{U}$-小集合であり, その間の射とは集合の間の写像である.

(2) Grp で群のなす圏を表すことにする. 対象は $\mathcal{U}$-小集合 G と積構造を定める射 $\mathrm{m}_G\colon G\times G\to G$ と単位元を定める元 $e_G\in G$, 逆元を与える射 $\mathrm{inv}_G\colon G\to G$ の組 $(G,\mathrm{m}_G,e_G,\mathrm{inv}_G)$ であって通常の群の公理を満たすものであり, 射 $(G,\mathrm{m}_G,e_G,\mathrm{inv}_G)\to(H,\mathrm{m}_H,e_H,\mathrm{inv}_H)$ とは集合の射 $G\to H$ であって単位元を保ち積と可換するものである.

(3) n を非負整数又はシンボル ∞ とするとき, Mfd_n で C_n 級多様体のなす圏を表す. 対象は C_n 級多様体, 即ち $\mathbf{R}^n$ の開集合を C_n 級関数で張り合わせた位相空間, であり射は局所的に C_n 級であるような写像 (この概念は well-defined であることに注意しよう) である.

(4) $\mathcal{C}$ を圏としたとき, $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ で逆圏を表す. 対象は $\mathcal{C}$ と同じであるが, 射の向きが逆向きである. 即ち,

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}}(X,Y):=\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,X)$$

で射の集合が定まり, 射の合成は $\mathcal{C}$ における射の合成から定まるものである.

圏 $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$ の間の**函手**とは, 集合の間の写像

$$F\colon \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_1)\to\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_2)$$

と射の合成たちと両立するような, $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_1)\times\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_1)$ で添え字付けられた Set における射

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}_1}(X,Y)\to\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}_2}(F(X),F(Y))$$

の組のことである. 略記ではあるが, この函手を単に $F\colon\mathcal{C}_1\to\mathcal{C}_2$ と書くのが慣例となっている.

例 付録 A.2. (1) $\mathcal{C}$ を圏としたとき, $\mathcal{C}$ の恒等函手 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ とは対象 $X\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ に対して X を対応させ, 射の間の写像 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)\to\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ は恒等写像で与えるものとする.

(2) S を Set の対象とする. このとき, 函手 $h_S\colon\mathrm{Set}^{\mathrm{opp}}\to\mathrm{Set}$ を対応

$$S'\mapsto\mathrm{Mor}_{\mathrm{Set}}(S',S)$$

で, 射の間の写像を

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Set}^{\mathrm{opp}}}(S_1,S_2)\to\mathrm{Mor}_{\mathrm{Set}}(h_S(S_1),h_S(S_2));\quad f\mapsto[g\mapsto g\circ f]$$

で定めればこれは函手を定めている.

$\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ で, $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への函手たちのなす圏を表すことにする. つまり, この圏の対象は函手 $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ であり, 射 $\alpha\colon F\to G$ は函手の間の自然変換, 即ち $\mathcal{D}$ の射のあつまり

$$\alpha(X)\colon F(X)\to G(X)$$

が任意の $\mathcal{C}$ の対象 X に対して定まっており $\mathcal{C}$ の射に対してしかるべき両立性 (定義は演習とする) を満たすもののことである. $X\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ に対し函手 h_X を

$$h_X\colon \mathcal{C}\to\mathrm{Set};\quad Y\mapsto\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$$

で定めることにしよう.

定理 付録 A.3. 自然な函手

$$\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}\to\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathrm{Set});\quad X\mapsto h_X$$

は忠実充満である. 即ち自然な射

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y)\to\mathrm{Mor}_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathrm{Set})}(h_X,h_Y)\tag{10}$$

は全単射である.

Proof. (10) の逆写像を構成しよう. 写像

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathrm{Set})}(h_X,h_Y)\to\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y)=\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,X)$$

を, 自然変換 $F\colon h_X\to h_Y$ に

$$F_X\colon h_X(X)\to h_Y(X)=\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,X)$$

による恒等写像の行き先 f を対応させるもの, として定義する. この対応が (10) の逆写像となることは, 定義に従って計算すれば容易にわかる. □

付録 B　スキーム

第 3 節に於いて注意したように, 本稿におけるアファイン群スキームの定義は通常の定義とは異なっている. 本節では通常のスキームの定義を与える. 色々証明は省略されているので, 興味のある読者は適切な教科書, 例えば [3] を参照されたい.

R を可換環としたとき, $\mathrm{Spec}(R)$ で R の素イデアル全体の集合を表すことにする. R が零環であるときは, 当然素イデアルは存在しないので, $\mathrm{Spec}(0)=\emptyset$ である[*9].

[*9] 空集合を位相空間とみなすことと同じように, 本稿では 0 環も環であると定義している.

例 付録 B.1. (1) 0 でない $\mathbf{Z}$ の素イデアルは素数と同一視できる．即ち

$$\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}) \cong \{p: \text{ 素数 }\} \sqcup \{\mathbf{Z} \text{ の } 0 \text{ イデアル }\}.$$

(2) k が代数閉体であるとき, Hilbert の零点定理より, 一変数多項式環 $k[X]$ の素イデアルは 0 でなければ必ず

$$(X-a)k[X],\ a \in k$$

の形をしており, 逆にこの形のイデアルは明らかに素イデアルである．即ち,

$$\mathrm{Spec}(k[X]) \cong k \sqcup \{k[X] \text{ の } 0 \text{ イデアル }\}.$$

R の元 f に対して, $U_f \subset \mathrm{Spec}(R)$ を

$$D_f := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) | f \notin \mathfrak{p}\}$$

で定める．$\mathrm{Spec}(R)$ 上の**ザリスキ位相**とは, $\mathrm{Spec}(R)$ の部分集合族 $\{D_f | f \in R\}$ で生成される位相として定義される．

スキームとは $\mathrm{Spec}(R)$ を「張り合わせて」得られるような「図形」である．二つ未定義用語が出てきたのであるが, それらを正当化するためには以下の概念が重要となる．

定義 付録 B.2. X を位相空間とし, $\mathrm{Open}(X)$ で X の開集合のなす圏を表すことにする（射は開集合の包含とする）．

(1) X 上の**前層**とは, 函手

$$\mathcal{F}\colon \mathrm{Open}(X)^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Set}$$

のことである．即ち, X の開集合 U と開部分集合 $V \subset U$ に対し, 対応する写像 $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, $f \mapsto f|_V$ と書くことにする, が与えられるような規則である．$f \mapsto f|_V$ のことを U から V への制限写像, 又は単に制限写像と呼ぶ．また, 任意の開集合 $U \subset X$ に対して, $\mathcal{F}$ と自然な函手

$$\mathrm{Open}(U)^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Open}(X)^{\mathrm{opp}}; \quad V \to V$$

の合成として得られる函手

$$\mathrm{Open}(U)^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Open}(X)^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{Set}$$

のことを $\mathcal{F}$ の U 上への制限と呼び, $\mathcal{F}|_U$ と書く．

(2) X 上の前層 $\mathcal{F}$ と $x \in X$ に対し, $\mathcal{F}$ の x での**茎** $\mathcal{F}_x$ を

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U)$$

で定義する．但し, 帰納極限は x の開近傍をはしるものとする．

(3) X 上の前層 $\mathcal{F}$ が**層**であるとは, 任意の開集合 U と任意の U の開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ に対して, 制限写像から誘導される自然な射 $\mathcal{F}(U)\to\prod_i\mathcal{F}(U_i)$ が同型

$$\mathcal{F}(U)\xrightarrow{\sim}\left\{(f_i)\in\prod\mathcal{F}(U_i)\mid f_i|_{U_i\cap U_j}=f_j|_{U_i\cap U_j}\right\}$$

を引き起こす時言う.

(4) **環付き空間**とは, 位相空間 X と X 上の環のなす層 $\mathcal{O}_X$ の組 $(X,\mathcal{O}_X)$ のことである. 環付き空間の射 $f\colon(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ とは, 位相空間の射 $f\colon X\to Y$ と, Y の開集合で添え字付けられた制限写像と両立的な環準同型

$$f_U^\sharp\colon\mathcal{O}_Y(J)\to\mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$$

のあつまり $f^\sharp=\{f_U^\sharp\}$ の組 $(f,f^\sharp)$ である.

(5) **局所環付き空間**とは, 環付き空間 $(X,\mathcal{O}_X)$ であって, 任意の茎 $\mathcal{O}_{X,x}$ が局所環であるもののことをさす. 局所環付き空間の射とは, 環付き空間の間の射であって, 各々の茎上では局所環の射を引き起こすもののことをさす.

例 付録 B.3. M を C_n 級多様体とする. 慣例により多様体というと下部位相空間 M のみであらわすことにしているが, 実際の定義は局所座標（の同値類）も組となっていることに注意しておこう. このとき, M 上の**構造層** $\mathcal{O}_M$ を M の開集合 U に対して U 上の $\mathbf{R}$ 値 C_n 級関数を対応させるものとする:

$$\mathcal{O}_M(U):=\{f\colon U\to\mathbf{R}\mid \text{どの局所座標で } f \text{ を引き戻しても } \mathrm{C}_n\text{級である }\}.$$

こうすると $\mathcal{O}_M$ は実際に位相空間 M 上の層となっており, 局所環付き空間 $(M,\mathcal{O}_M)$ が定義される.

M が最初から $\mathbf{R}^n$ の開集合であるときに, 本稿では便宜上そのような M を**小さな** C_n 級多様体と呼ぶことにする. こうしておくと, 新しい多様体の定義が得られる. 即ち, C_n **級多様体**とは局所環付き空間 $(M,\mathcal{O}_M)$ であり以下の条件

- M はパラコンパクト位相空間,
- $(M,\mathcal{O}_M)$ は局所的に「小さな」C_n 級多様体と局所環付き空間として同型となっている,

をみたすもののことである. 二つ目の条件があることにより, 局所変換は自動的に C_n 級となることに注意する. この例から環付き空間という概念は従来の張り合わせという概念とかなりマッチした概念であることが分かるかと思う.

命題 付録 B.4. $X=\mathrm{Spec}(R)$ のとき, 対応 $D_f\mapsto R_f$ は X 上の環の層を定める. ここで R_f は R の積閉集合 $\{1,f,f^2,f^3,\cdots\}$ による局所化のこととする. この環の層を

$\mathcal{O}_X$ と書く．ある可換環 R と局所環付き空間の同型 $X \cong (\mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)})$ が存在するような局所環付き空間 X のことを**アファインスキーム**と呼ぶ.

次の命題は重要で, 本質的にアファインスキームの圏を考えることと可換環の圏を考えることは同値である:

命題 付録 B.5. アファインスキームの圏と可換環の圏の逆圏は同値である:

$$\mathrm{Comm.Alg}^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aff.Sch}; \quad R \mapsto (\mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}).$$

注意 付録 B.6. この命題と米田の補題を用いることにより, 本文中定義された k 上のアファインスキームの圏とこの小節に於いて定義される k 上のアファインスキームの圏が**同値**であることがわかる.

スキームとは, アファインスキーム（これが以前の例の「小さな」多様体に相当する）を張り合わせて得られる環付き空間のことである．即ち:

定義 付録 B.7. **スキーム**とは, 局所環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ であり, 局所的にアファインスキームと同型となっているもののことをさす．即ち, 任意の $x \in X$ に対し, ある x の開近傍 $x \in U \subset X$ と可換環 R が存在して, さらに局所環付き空間の同型

$$(U, \mathcal{O}_X|_U) \cong (\mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)})$$

が存在するときに, 局所環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ はスキームであるという．スキームの射 $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ とは局所環付き空間の間の射のこととする．スキームのなす圏を Sch で表すことにする.

記述を単純にするために, 通常は $\mathcal{O}_X$ は省略して, 単に X でスキームを表すことにする.

例 付録 B.8. (1) 定義から, アファインスキームはスキームである.

(2) $\mathbf{Z}$ 上のアファイン直線 $\mathbb{A}^1$ を $\mathbb{A}^1 := \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[t])$ で定める．この開集合 $U := \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[t, t^{-1}])\text{“}=\text{''}\, \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ に沿って, 二つのアファイン直線を開写像たち

$$\phi_1 \colon U \subset \mathbb{A}^1, \quad \phi_2 \colon U \hookrightarrow \mathbb{A}^1; x \mapsto x^{-1}$$

によって張り合わせてできるスキームを射影直線と呼び $\mathbb{P}^1$ とかく．これはスキームであるが, アファインスキームではない．この証明は大分非自明ではあるが, 読者の演習問題としておこう.

さて, S をスキームとするとき, S スキームとはスキーム X と射 $f\colon X \to S$ の組のことをさす．少しまどろっこしいので, 単に $f\colon X \to S$ で S スキームを表したり, X で表し f のことを S スキーム X の構造射と呼んだりする．X, Y を構造射 f_X, f_Y を持つ S スキームとしたとき, S スキームの射 $g\colon X \to Y$ とは, スキームの射であって $f_X = f_Y \circ g$ を満たすもののこととする．S スキームのなす圏を Sch/S で表す．すると, 米田の補題より忠実充満函手

$$\mathrm{Sch}/S \hookrightarrow \mathrm{Funct}((\mathrm{Sch}/S)^{\mathrm{opp}}, \mathrm{Set}); \quad X \to \mathrm{Mor}_{\mathrm{Sch}/S}(-, X) \tag{11}$$

を得る (アファインスキームの場合とは逆であることに注意する)．集合の圏への函手 F_1, F_2 が与えられているときに, これらの「直積*10」は集合の直積を用いることにより簡単に定義できることに注意する．即ち,

$$F_1 \times F_2(X) := F_1(X) \times F_2(X).$$

命題 付録 B.9. 圏 Sch/S には直積が存在する．即ち, 函手 (11) の像の直積は再び (11) の像と同型となる．$X_1 \to S, X_2 \to S$ の Sch/S における直積, 又は S 上の直積, を $X_1 \times_S X_2 \to S$ と書く．

例 付録 B.10. $S = \mathrm{Spec}(A), X_i = \mathrm{Spec}(R_i)$ であるとき, 命題付録 B.5 から構造射 $f_i\colon X_i \to S$ は環準同型 $A \to R_i$ に対応している．このとき, 一意的な同型を除いて一意的な同型

$$X_1 \times_S X_2 \cong \mathrm{Spec}(R_1 \otimes_A R_2)$$

が存在する．これはテンソル積の普遍性から明らか.

実際のところ上の例は極めて本質的で, 命題付録 B.9 はこの例を「張り合わせて」証明される．

参考文献

[1] P. Deligne, Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, Galois groups over **Q** (Berkeley, CA, 1987), 79–297, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, **16**, Springer, New York, 1989.

[2] P. Deligne, J. Milne, Tannakian categories, in Hodge Cycles, Motives and Shimura varieties, Lecture Notes in Math., **900**, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[3] R. Hartshone, Algebraic geometry, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag, 1977.

*10 普遍性を用いて定義する方が標準的ではある．

[4] M. Kashiwara, P. Schapira, Categories and sheaves, grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. **332**.

[5] K. Sakugawa, A p-adic analog of the weak Zagier conjecture and non abelian p-adic Hodge theory, preprint, available at `https://sites.google.com/site/kenjisakugawashomepage/reserch-articles`.