多重ゼータ値と $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の基本群

山本 修司（慶應義塾大学・KiPAS）

2018 年 9 月 13 日

1　基本群と接基点 (Betti side)

1.1　道の空間と基本群

M を可微分多様体とする．区分的に滑らかな連続写像 $\gamma\colon [0,1] \to M$ を M の道 (path) と呼ぶ．$\gamma(0)$, $\gamma(1)$ をそれぞれ道 γ の始点，終点という．点 $x, y \in M$ に対して，x を始点，y を終点とする道全体の集合を $\mathcal{P}(M; y, x)$ で表す[*1]．またそのホモトピー類の集合を $\pi(M; y, x)$ で表す：

$$\pi(M; y, x) := \mathcal{P}(M; y, x)/\sim .$$

ここで $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{P}(M; y, x)$ がホモトピック ($\gamma_0 \sim \gamma_1$) とは，ある連続写像 $H\colon [0,1] \times [0,1] \to M$ に対して $H_u(t) = H(u, t)$ と書くとき

$$H_u \in \mathcal{P}(M; y, x) \ (\forall u \in [0,1]), \quad H_0 = \gamma_0, \quad H_1 = \gamma_1$$

が成り立つことをいう．

$\gamma \in \mathcal{P}(M; y, x)$, $\gamma' \in \mathcal{P}(M; z, y)$ に対して

$$\gamma'\gamma(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & (0 \le t \le 1/2), \\ \gamma'(2t-1) & (1/2 \le t \le 1) \end{cases}$$

とおくと，道の合成 $\gamma'\gamma \in \mathcal{P}(M; z, x)$ が定まり，さらにホモトピー類の間にも $[\gamma'][\gamma] = [\gamma'\gamma]$ とすることで合成が誘導される：

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}(M; z, y) \times \mathcal{P}(M; y, x) \longrightarrow \mathcal{P}(M; z, x) \\ \rightsquigarrow \quad &\pi(M; z, y) \times \pi(M; y, x) \longrightarrow \pi(M; z, x). \end{aligned}$$

これにより，全ての $x, y \in M$ に対して集合 $\pi(M; y, x)$ を集めた族 $\pi(M) = \bigl(\pi(M; y, x)\bigr)_{x, y \in M}$ には亜群の構造が入る（基本亜群）．特に $x \in M$ に対して $\pi_1(M; x) = \pi(M; x, x)$ とおくと，これは群となる（基本群）．

*1 $\mathcal{P}(M; x, y)$ のように，始点と終点の順序を逆に書く流儀もある．

1.2　接基点

以下では話を簡単にするため，$M = \mathbb{C} \setminus S$，ただし S は $\mathbb{C}$ の有限部分集合，とする．

$s \in S$ と，s における $\mathbb{C}$ の接ベクトル $v \neq 0$ との組 (s, v) を M の接基点と呼ぶ．以下この組を v_s と書く．また自然な同一視により，接ベクトル v を $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ の元とみなす．例えば 1_0 とは，複素平面の点 0 における接ベクトル 1 のことである．以下，M の点および S の点における接基点全体の集合を $\tilde{M}$ で表す．

$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ を区分的に滑らかな連続写像とする．$t \in [0,1]$ に対して，

$$\frac{d^{\pm}\gamma}{dt}(t) = \lim_{t' \to t \pm 0} \frac{\gamma(t') - \gamma(t)}{t' - t} \quad \text{(複号同順)}$$

と書く．

定義 1.1.　(1) 区分的に滑らかな連続写像 $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ が次の条件を満たすとき，γ を M の尖った道 (cuspidal path) という：

- $\gamma(t_0) \in S$ なる $t_0 \in [0,1]$ は高々有限個である．
- $\gamma(t_0) \in S$ なる任意の t_0 に対して，ある $v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在し
$$\frac{d^{+}\gamma}{dt}(t_0) = v = -\frac{d^{-}\gamma}{dt}(t_0)$$
が成り立つ．ただし $t_0 = 0$ (resp. $t_0 = 1$) のときは $\frac{d^{-}\gamma}{dt}(t_0)$ (resp. $\frac{d^{+}\gamma}{dt}(t_0)$) の条件は考えない．

(2) (1) において，$x = \gamma(0)$ が S に属するとき，$v = \frac{d^{+}\gamma}{dt}(0)$ を接ベクトルとする接基点 v_x を γ の始点とよぶ．また $y = \gamma(1)$ が S に属するとき，$w = -\frac{d^{-}\gamma}{dt}(1)$ を接ベクトルとする接基点 w_y を γ の終点とよぶ．

(3) 尖った道 $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ が，始点と終点を除いて S の点を通らないとき，整った道 (clean path) という．

(4) $x, y \in \tilde{M}$ に対して，x を始点，y を終点とする尖った道全体の集合を $\mathcal{P}(\tilde{M}; y, x)$ と書く．また整った道全体のなす部分集合を $\mathcal{P}^{\circ}(\tilde{M}; y, x)$ と書く．

二つの整った道がホモトピックであるという関係は，通常の場合と同様に定義される ($\mathcal{P}^{\circ}(\tilde{M}; y, x)$ の中での連続変形を考えればよい)．そのホモトピー類の集合を $\pi(\tilde{M}; y, x)$ とおく．一方，尖った道の合成

$$\mathcal{P}(\tilde{M}; z, y) \times \mathcal{P}(\tilde{M}; y, x) \longrightarrow \mathcal{P}(\tilde{M}; z, x)$$

は通常の道の合成と同様に定義されるが，y が接基点の場合整った道同士の合成でも整った道にならない．この状況でホモトピー類の合成を考えるために，次のようにして尖った道を整える：$\gamma \in \mathcal{P}(\tilde{M}; y, x)$ が $t_0 \in (0,1)$ において接基点 v_s を通るとする．すなわち

$$\gamma(t_0) = s \in S, \quad \frac{d^{+}\gamma}{dt}(t_0) = v = -\frac{d^{-}\gamma}{dt}(t_0).$$

十分小さな $\varepsilon > 0$ をとって，円板 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - s| \leq \varepsilon\}$ が s 以外の S の点を含まないようにする．また必要なら ε をさらに小さくして，t_0 の前後で $\gamma(t)$ が一度は D の外に出るようにしておき，

$$t_- = \inf\bigl\{t < t_0 \bigm| \gamma([t, t_0]) \subset D\bigr\}, \quad t_+ = \sup\bigl\{t > t_0 \bigm| \gamma([t_0, t]) \subset D\bigr\}$$

とおく．$t_- < t < t_+$ なる t で，$\gamma(t) = s$ となる点が t_0 以外にもある場合には，さらに ε を小さくとることで（$t_\pm$ を t_0 に近付けて）それらを排除する．このとき

$$\gamma'(t) = \begin{cases} \gamma(t) & (t < t_- \text{ または } t > t_+), \\ \varepsilon \frac{\gamma(t) - s}{|\gamma(t) - s|} + s & (t_- < t < t_0 \text{ または } t_0 < t < t_+), \\ \varepsilon \frac{v}{|v|} + s & (t = t_0) \end{cases}$$

と定義すると，γ から t_0 における接基点 v_s を除外した道 $\gamma' \in \mathcal{P}(\tilde{M}; y, x)$ を作ることができる．この操作を始点と終点以外の全ての接基点で繰り返して得られる整った道を γ° とおく．γ° は各段階での $\varepsilon > 0$ の取り方に依存するが，ホモトピー類 $[\gamma^\circ]$ はそれらに依存せず，写像

$$\mathcal{P}(\tilde{M}; y, x) \longrightarrow \pi(\tilde{M}; y, x);\ \gamma \longmapsto [\gamma^\circ]$$

が自然に定義される．

上の写像を使うと，$x, y, z \in \tilde{M}$ に対して道のホモトピー類の合成

$$\pi(\tilde{M}; z, y) \times \pi(\tilde{M}; y, x) \longrightarrow \pi(\tilde{M}; z, x)$$

を $[\gamma'][\gamma] = [(\gamma'\gamma)^\circ]$ によって定めることができ，基本亜群 $\pi(\tilde{M}) = \bigl(\pi(\tilde{M}; y, x)\bigr)_{x, y \in \tilde{M}}$ や基本群 $\pi_1(\tilde{M}; x) = \pi(\tilde{M}; x, x)$ が定義される．

なおこの先は，接基点を考える場合でも˜を省略して $\pi(M; y, x)$ などと書くことにする．

1.3 群環

$x \in \tilde{M}$ を一つとる．基本群 $\pi_1(M; x)$ の群環 $\mathbb{Q}[\pi_1(M; x)]$ において，$\mathbb{Q}$ 代数の準同型

$$\epsilon \colon \mathbb{Q}[\pi_1(M; x)] \longrightarrow \mathbb{Q};\ \sum_\gamma a_\gamma \gamma \longmapsto \sum_\gamma a_\gamma$$

の核を J_x とおく（ϵ は群環の augmentation，J_x は augmentation ideal と呼ばれる）．

$x, y \in \tilde{M}$ に対して，道のホモトピー類の合成

$$\pi(M; y, x) \times \pi(M; x, x) \longrightarrow \pi(M; y, x)$$

または

$$\pi(M; y, y) \times \pi(M; y, x) \longrightarrow \pi(M; y, x)$$

により，$\pi(M; y, x)$ が生成する $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\mathbb{Q}[\pi(M; y, x)]$ は左 $\mathbb{Q}[\pi_1(M; y)]$ 加群および右 $\mathbb{Q}[\pi_1(M; x)]$ 加群の構造を持つ．

補題 1.2. 整数 $N \geq 0$ に対し，$J_y^N \cdot \mathbb{Q}[\pi(M;y,x)] = \mathbb{Q}[\pi(M;y,x)] \cdot J_x^N$ が成り立つ．

証明． $\alpha \in J_y^N$, $\gamma \in \mathbb{Q}[\pi(M;y,x)]$ とすると $\gamma^{-1}\alpha\gamma \in J_x^N$ より $\alpha\gamma = \gamma(\gamma^{-1}\alpha\gamma) \in \mathbb{Q}[\pi(M;y,x)] \cdot J_x^N$ となり，$J_y^N \cdot \mathbb{Q}[\pi(M;y,x)] \subset \mathbb{Q}[\pi(M;y,x)] \cdot J_x^N$ を得る．逆の包含も同様である． □

これ以後は J_x をしばしば単に J と書く．また商ベクトル空間

$$\mathbb{Q}[\pi(M;y,x)]/\big(J_y^N \cdot \mathbb{Q}[\pi(M;y,x)]\big) = \mathbb{Q}[\pi(M;y,x)]/\big(\mathbb{Q}[\pi(M;y,x)] \cdot J_x^N\big)$$

を $\mathbb{Q}[\pi(M;y,x)]/J^N$ と略記する．

2 微分形式の代数 (de Rham side)

前節に引き続き，S を $\mathbb{C}$ の有限部分集合とし，$M = \mathbb{C} \setminus S$ という空間を考える．

2.1 アフィンスキームとしての $M = \mathbb{C} \setminus S$

まずアフィンスキーム（の関手としての解釈）についてごく簡単に説明しておく．

K を体として，K 係数の二変数多項式 $f(x,y) \in K[x,y]$ をとると，方程式 $f(a,b) = 0$ を満たす点 (a,b) の全体は座標平面内の図形を定めると考えられる．ここで a, b は K の元である必要はなく，一般に K 代数 R に対して「R 有理点の集合」$\{(a,b) \in R^2 \mid f(a,b) = 0\}$ を考えることができる．この集合は K 代数 $K[x,y]/(f)$ から R への K 準同型全体の集合と自然に対応付けることができる：

$$\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(K[x,y]/(f), R) \xrightarrow{\cong} \{(a,b) \in R^2 \mid f(a,b) = 0\};\ \varphi \mapsto \big(\varphi(x), \varphi(y)\big).$$

つまり $A = K[x,y]/(f)$ という K 代数が，任意の K 代数 R に対して，「方程式 $f = 0$ が定める図形」R 有理点の集合 $\mathrm{Hom}_K(A, R)$ を与えている．

そこで一般に，任意の K 代数 A はある「図形」に対応していると考え，その図形を $X = \operatorname{Spec} A$ と書く．X の R 有理点の集合は $X(R) = \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(A, R)$ で与えられる．これを A で表現される K 上のアフィンスキームという[*2]．

例 2.1. n 変数多項式環 $K[x_1, \ldots, x_n]$ で表現されるアフィンスキームを $\mathbb{A}_K^n$ と書き，n 次元アフィン空間という．$n = 1$ のときはアフィン直線，$n = 2$ のときはアフィン平面である．有理点の集合は $\mathbb{A}_K^n(R) = R^n$ である．

さて，K を $\mathbb{C}$ の部分体とし，有限集合 S は K に含まれているとする．このとき K 代数 A を $A = K[x, (x-s)^{-1} \mid s \in S]$ で定めると，アフィンスキーム $X = \operatorname{Spec} A$ の R 有理点集合は

$$X(R) = \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(K[x, (x-s)^{-1} \mid s \in S], R) \xrightarrow{\cong} R \setminus S;\ \varphi \mapsto \varphi(x)$$

[*2] 約言すれば，K 上のアフィンスキームとは K 代数の圏における表現可能な共変関手である，というのがここでの立場である．これに対し，素イデアルの集合に位相と構造層を乗せた局所環付き空間としての定義もあり，というかむしろそちらが普通の定義だが，さしあたりここでの目的には必要ない．

なる全単射によって $R\setminus S$ と同一視される．そこで $X=\mathbb{A}^1_K\setminus S$ と書いてもよかろう[*3]．特に $X(\mathbb{C})=\mathbb{C}\setminus S=M$ であり，空間 M が K 上のアフィンスキーム X の $\mathbb{C}$ 有理点の集合として解釈されたことになる．

2.2 微分形式で生成される代数

次に $X=\mathbb{A}^1_K\setminus S$ の（代数的）de Rham コホモロジーを考える．今の場合[*4]，これは単に

$$0\to\Omega^0\xrightarrow{d}\Omega^1\to 0\to\cdots,$$

ただし

$$\Omega^0=A=K[x,(x-s)^{-1}\mid s\in S],\qquad \Omega^1=A\cdot dx$$

という複体のコホモロジーとして表される（d は通常の微分計算と同じ）．実際に計算すると，

$$H^0_{dR}(X/K)=K,\qquad H^1_{dR}(X/K)=\bigoplus_{s\in S}K\omega_s\quad\left(\omega_s:=\frac{dx}{x-s}\right)$$

を得る．

De Rham の定理として知られているように，道のホモロジー類に対して線積分を扱うだけなら $H^1_{dR}(X/K)$ を考えれば十分である．しかし我々は反復積分を扱いたいので，天下り的だが，次の K ベクトル空間を考える：

$$A^{dR}=A^{dR}(X)=K\langle\omega_s\mid s\in S\rangle.$$

右辺は ω_s $(s\in S)$ を形式的な文字とみたときの非可換多項式全体を表す．S の元の有限列 $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ に対して，対応する単項式を $\omega_\alpha=\omega_{\alpha_1}\cdots\omega_{\alpha_k}$ と書けば

$$A^{dR}=\bigoplus_{k\geq 0}\bigoplus_{\alpha\in S^k}K\omega_\alpha$$

となる．これらの単項式の次数を使って，A^{dR} 上の length filtration を

$$L_NA^{dR}=\bigoplus_{0\leq k\leq N}\bigoplus_{\alpha\in S^k}K\omega_\alpha$$

と定義する．

3 比較定理

3.1 反復積分と比較同型

以上の準備のもとで，$X=\mathbb{A}^1\setminus S$ の場合の比較同型定理を述べる．

[*3] 射影直線 $\mathbb{P}^1_K$ が $\mathbb{A}^1_K$ に無限遠点を付け加えたものであることから，$X=\mathbb{P}^1_K\setminus(S\cup\{\infty\})$ と書くこともできる．むしろ後者の書き方のほうが一般的なので，タイトルではそちらに従った．

[*4] 代数多様体が高次元だったり，アフィンでなかったり，特異点があったりすれば，事情はより複雑になる．

定理 3.1. K を $\mathbb{C}$ の部分体，S を K の有限部分集合として，$X = \mathbb{A}^1_K \setminus S$, $M = X(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus S$ とおく．また $x, y \in \tilde{M}$ をとる．このとき任意の整数 $N \geq 0$ に対して，$\mathbb{C}$ ベクトル空間の同型写像

$$\mathrm{comp}_{B,dR} \colon L_N A^{dR}(X) \otimes_K \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[\pi(M; y, x)]/J^{N+1}, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \tag{3.1}$$

が（正規化された）反復積分を通じて与えられる：

$$\omega_\alpha \longmapsto \left(\gamma \mapsto \int_\gamma^{\mathrm{reg}} \omega_\alpha\right).$$

この定理の証明は本稿では解説しないので，[1] の第 3 章や [2] の第 5 章（接基点は扱っていないが）などを見ていただきたい．ここでは，主張に現れた反復積分の正規化について説明しておこう．微分形式の単項式 $\omega_\alpha = \omega_{\alpha_1} \cdots \omega_{\alpha_k}$ の，整った道 $\gamma \in \mathcal{P}^0(M; y, x)$ に沿った反復積分 $\int_\gamma \omega_\alpha$ を定義したい．まず x, y が接基点でなく通常の M の点であれば，普通の反復積分

$$\int_\gamma \omega_\alpha = \int_{0<t_1<\cdots<t_k<1} \omega_{\alpha_1}(\gamma(t_1)) \cdots \omega_{\alpha_k}(\gamma(t_k))$$

を考えればよい（ただし，これが γ のホモトピー類にしかよらないこと，さらに $k \leq N$ であれば J^{N+1} での剰余類にしかよらないことは証明を要する）．次に x, y の一方または両方が接基点であるとする．$0 < \eta < \frac{1}{2}$ に対して

$$\gamma_\eta(t) = \gamma((1-\eta)t + \eta(1-t))$$

とおくと，γ_η は M の道になるので，上のように通常の反復積分が定義できる．これにより，

$$f(\eta) = \int_{\gamma_\eta} \omega_\alpha$$

なる関数が定まるが，この関数は $\eta \to 0$ において

$$f(\eta) = \sum_{i=0}^{k} a_i (\log \eta)^i + O(\eta^\varepsilon) \qquad (\exists \varepsilon > 0)$$

という形の漸近展開を持つことがいえる．そこでこの漸近展開の定数項をとって

$$\int_\gamma^{\mathrm{reg}} \omega_\alpha := a_0$$

と定める．

注意 3.2. 写像の構成からすぐ分かるように，定理 3.1 の $\mathrm{comp}_{B,dR}$ は N に関する帰納系の同型を与えている．したがって

$${}_yA_x^B := \varinjlim_N \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[\pi(M; y, x)]/J^{N+1}, \mathbb{Q})$$

とおくと，同型

$$\mathrm{comp}_{B,dR} \colon A^{dR} \otimes_K \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} {}_yA_x^B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \tag{3.2}$$

を得る．

例 3.3. $S=\{0,1\}$, $K=\mathbb{Q}$ として，整った道 dch を $\mathrm{dch}(t)=t$ で定める[*5]．dch の始点は接基点 1_0，終点は接基点 -1_1 である．これらの接基点をそれぞれ $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ と書き，$\mathrm{dch}\in\mathcal{P}^0(M;\mathbf{1},\mathbf{0})$ のホモトピー類を同じ記号 $\mathrm{dch}\in\pi(M;\mathbf{1},\mathbf{0})$ で表す．

このとき，収束インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対する多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ は $\omega(\mathbf{k}):=\omega_1\omega_0^{k_1-1}\cdots\omega_1\omega_0^{k_r-1}\in A^{dR}$ を用いて

$$\zeta(\mathbf{k})=(-1)^r\int_{\mathrm{dch}}\omega(\mathbf{k})=(-1)^r\,\mathrm{comp}_{dR,B}\big(\omega(\mathbf{k})\big)(\mathrm{dch})$$

と書ける．収束インデックスでない場合には，シャッフル正規化（の定数項）$\zeta_{Ш}(\mathbf{k})$ について

$$\zeta_{Ш}(\mathbf{k})=(-1)^r\int_{\mathrm{dch}}^{\mathrm{reg}}\omega(\mathbf{k})=(-1)^r\,\mathrm{comp}_{dR,B}\big(\omega(\mathbf{k})\big)(\mathrm{dch})$$

が成り立つ．

3.2 構造の対応

$\mathbb{Q}$ ベクトル空間 ${}_yA_x^B$ および K ベクトル空間 A^{dR} は，以下に列挙する代数的な付加構造を持っている．ここで $*=B$ または dR に対して ${}_yA_x^*$ などと書くが，${}_yA_x^{dR}$ とは単に A^{dR} のことで，実際は添字 x,y によらない．

- 積 ${}_yA_x^*\otimes{}_yA_x^*\longrightarrow{}_yA_x^*$
  B: $\mathbb{Q}[\pi(M;y,x)]\longrightarrow\mathbb{Q}[\pi(M;y,x)]\otimes\mathbb{Q}[\pi(M;y,x)];\ \gamma\longmapsto\gamma\otimes\gamma$ の双対
  dR: 文字 ω_s $(s\in S)$ に関するシャッフル積
- 単位射 $\mathbb{Q}\longrightarrow{}_yA_x^*$
  B: $\mathbb{Q}[\pi(M;y,x)]\longrightarrow\mathbb{Q};\ \gamma\longmapsto 1$ の双対
  dR: 自然な埋め込み $\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}\langle\omega_s\mid s\in S\rangle$
- 余積 ${}_zA_x^*\longrightarrow{}_zA_y^*\otimes{}_yA_x^*$
  B: 合成 $\pi(M;z,y)\times\pi(M;y,x)\longrightarrow\pi(M;z,x)$ が定める線型写像の双対
  dR: $\omega_{\alpha_1}\cdots\omega_{\alpha_k}\longmapsto\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\omega_{\alpha_{i+1}}\cdots\omega_{\alpha_k}\otimes\omega_{\alpha_1}\cdots\omega_{\alpha_i}$
- 余単位射 ${}_xA_x^*\longrightarrow\mathbb{Q}$
  B: 自然な埋め込み $\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}[\pi_1(M;x)]$ の双対
  dR: $\omega_{\alpha_1}\cdots\omega_{\alpha_k}\longmapsto\begin{cases}1 & (k=0),\\ 0 & (k>0)\end{cases}$
- 対合射 ${}_yA_x^*\longrightarrow{}_xA_y^*$
  B: $\gamma\longmapsto\gamma^{-1}$ の双対
  dR: $\omega_{\alpha_1}\cdots\omega_{\alpha_k}\longmapsto(-1)^k\omega_{\alpha_k}\cdots\omega_{\alpha_1}$

[*5] dch は droit chemin（まっすぐな道）の略である．

反復積分の性質により，(3.2) の同型写像 $\mathrm{comp}_{B,dR}$ はこれらの付加構造を保つ．例えば積と余積が保たれることは，それぞれ

$$\int_\gamma \omega_{\alpha_1}\cdots\omega_{\alpha_k}\cdot\int_\gamma \omega_{\beta_1}\cdots\omega_{\beta_l} = \int_\gamma \left(\omega_{\alpha_1}\cdots\omega_{\alpha_k} ш\, \omega_{\beta_1}\cdots\omega_{\beta_l}\right),$$

$$\int_{\gamma'\gamma} \omega_{\alpha_1}\cdots\omega_{\alpha_k} = \sum_{i=0}^{k}\int_{\gamma'} \omega_{\alpha_{i+1}}\cdots\omega_{\alpha_k}\cdot\int_\gamma \omega_{\alpha_1}\cdots\omega_{\alpha_i}$$

という等式の帰結である．

参考文献

[1] J. I. Burgos Gil, J. Fresán, *Multiple zeta values: from numbers to motives*, Clay Mathematics Proceedings, to appear.

[2] 河野俊丈，反復積分の幾何学，シュプリンガー・ジャパン，2009.