ブロードハースト・クライマー予想について

田坂浩二 (愛知県立大学)

1 序文

この講演では，深さフィルトレーション付き多重ゼータ値代数と $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のモジュラー形式の次元的な関係を示唆するブロードハースト・クライマー予想 [1] を紹介する。ブラウン [2] により，この予想が深さフィルトレーション付きモチビック多重ゼータ値代数に付随するリー代数 $\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}$ の構造に関する予想から従うことが示された。本講演で $\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}$ は導入しないが，代わりに $\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}$ と同型と予想されている線形複シャッフル方程式の解空間 DSh を導入し，その代数構造とモジュラー形式（の周期多項式）の具体的な関係について結果を網羅する。

2 多重ゼータ値の “モジュラー現象”

2 節の要点

- 2 重ゼータ値とモジュラー形式の次元的な関係
- ブロードハースト・クライマー予想の概略

多重ゼータ値とモジュラー形式の関係は，多重ゼータ値代数 $\mathcal{Z}$ の深さに関する増大フィルトレーション

$$\mathfrak{D}^0\mathcal{Z} = \mathbb{Q} \subset \mathfrak{D}^1\mathcal{Z} \subset \cdots \subset \mathfrak{D}^r\mathcal{Z} = \langle \text{MZVs of depth} \leq r \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \cdots \subset \mathcal{Z}$$

の重さ k の部分空間 $\mathfrak{D}^r\mathcal{Z}_k = \mathfrak{D}^r\mathcal{Z} \cap \mathcal{Z}_k$ の次元の観察に現れる。素朴なので，深さ 2 の場合のザギエの予想 [8] を述べよう。

予想 1. (ザギエ) 正の偶数 k に対し,

$$\dim \mathfrak{D}^2 \mathcal{Z}_k \overset{?}{=} \frac{k}{2} - 1 - \dim S_k$$

が成り立つ。ただし，S_k は重さ k の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のカスプ形式の空間である。

これは 2 重ゼータ値の空間の次元とカスプ形式の空間の次元の関係を示唆する予想である。実は，次元の関係のみならず，カスプ形式から具体的な 2 重ゼータ値の線形関係式をつくることができる（命題 9）。

ブロードハースト・クライマー予想（the Broadhurst–Kreimer conjecture [1]）は，商空間 $\mathfrak{D}^r \mathcal{Z}_k / \mathfrak{D}^{r-1} \mathcal{Z}_k$ の次元予想である（正確な主張は予想 4 で述べる）。

3　線形複シャッフル方程式

3 節の要点

- 線形複シャッフル方程式の解空間 DSh の定義
- 一般複シャッフル関係式との関係

論文 [5]（多重ゼータ値の定義が逆向きであることに注意）に沿って，記号を準備する。

シャッフル積：$ш : \mathbb{Q}\langle \mathsf{x}_n \mid n \geq 1 \rangle^{\otimes 2} \to \mathbb{Q}\langle \mathsf{x}_n \mid n \geq 1 \rangle$

$$\mathsf{x}_n w \,ш\, \mathsf{x}_m w' = \mathsf{x}_n (w \,ш\, \mathsf{x}_m w') + \mathsf{x}_m (\mathsf{x}_n w \,ш\, w').$$

シャープ作用素：$f \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_r]$ に対し,

$$f^\sharp(x_1, \ldots, x_r) = f(x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + \cdots + x_r).$$

便利なので，$\mathbb{Q}\langle \mathsf{x}_n \mid n \geq 1 \rangle$ の単項式 $\mathsf{x}_1 \cdots \mathsf{x}_r$ に対し,

$$f(\mathsf{x}_1 \cdots \mathsf{x}_r) = f(x_1, \ldots, x_r) \quad (f \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_r])$$

とし，この記号を線形に拡張しておく。例えば,

$$f(\mathsf{x}_1 \,ш\, \mathsf{x}_2) = f(\mathsf{x}_1 \mathsf{x}_2 + \mathsf{x}_2 \mathsf{x}_1) = f(x_1, x_2) + f(x_2, x_1),$$

$$f(\mathsf{x}_1 \sqcup \mathsf{x}_2\mathsf{x}_3) = f(x_1, x_2, x_3) + f(x_2, x_1, x_3) + f(x_2, x_3, x_1)$$

のように使う。

定義 2. (線形複シャッフル空間)
i) $DSh^{(1)} := x_1^2\mathbb{Q}[x_1^2]$
ii) $DSh^{(r)} := \{f \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_r] \mid 0 = f(\mathsf{x}_1 \cdots \mathsf{x}_i \sqcup \mathsf{x}_{i+1} \cdots \mathsf{x}_r) = f^\sharp(\mathsf{x}_1 \cdots \mathsf{x}_i \sqcup \mathsf{x}_{i+1} \cdots \mathsf{x}_r),\ 1 \leq i \leq r-1\}$
iii) $DSh := \bigoplus_{r\geq 1} DSh^{(r)} \subset \bigoplus_{r\geq 1} \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_r]$.

DSh の定義方程式は**線形複シャッフル方程式**と呼ばれる。この形では，井原・金子・ザギエ [5] により最初に導入された。例えば，$f \in DSh^{(2)}$ の必要十分条件は，

$$f(x_1, x_2) + f(x_2, x_1) = 0, \quad f(x_1, x_1 + x_2) + f(x_2, x_1 + x_2) = 0$$

である。これは，正規化された複シャッフル関係式の多重ゼータ値の母関数を用いた表示において，"積と低い深さを無視"（数学的な説明は次節を参照）して得られる方程式である。すなわち，深さ r の多重ゼータ値の母関数を

$$F^{(r)}(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{l_1, \ldots, l_r \geq 1} \zeta(l_1, \ldots, l_r) x_1^{l_1-1} \cdots x_r^{l_r-1}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} 0 &\equiv F^{(r)}(\mathsf{x}_1 \cdots \mathsf{x}_i \sqcup \mathsf{x}_{i+1} \cdots \mathsf{x}_r) \quad (1 \leq i \leq r-1), \\ 0 &\equiv \left(F^{(r)}\right)^\sharp(\mathsf{x}_1 \cdots \mathsf{x}_i \sqcup \mathsf{x}_{i+1} \cdots \mathsf{x}_r) \quad (1 \leq i \leq r-1) \end{aligned}$$

が成り立つ。一つ目の式は，調和積展開で積と低い深さを無視した関係式と同値である。二つ目の式は，シャッフル積展開で積を無視した関係式と同値となる。実際には，各々調和積の正規化とシャッフル積の正規化多重ゼータ値の母関数に対して成り立つ式であるが，実は，積と低い深さを無視すると，正規化の違いは無くなってしまうということがわかる (参照:[5, Corollary 7] の証明)。

得られた主張を述べておこう。

命題 3. 積と低い深さを無視すると，$r \geq 2$ に対して，深さ r の多重ゼータ値の母関数 $F^{(r)}(x_1, \ldots, x_r)$ は深さ r の線形複シャッフル方程式を満たす。

4　深さ次数化多重ゼータ値代数

4 節の要点

- 前節の “積と低い深さを無視する”の正確な意味
- DSh の次元 $\rightsquigarrow$ 深さ次数化多重ゼータ値の空間の次元の上限

商代数 $\overline{\mathcal{Z}} := \mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$ に対し，$\overline{\mathcal{Z}}_{>0} := \bigoplus_{k\geq 1}\overline{\mathcal{Z}}_k$ とし，$\mathcal{L} := \overline{\mathcal{Z}}_{>0}/\overline{\mathcal{Z}}_{>0}^2$ とおく。空間 $\mathcal{L}$ では，**積を無視**している。商空間 $\mathcal{L}$ には深さフィルトレーション $\mathfrak{D}^{\bullet}$ が誘導される。空間 $\mathcal{L}$ の深さ次数化を $\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\,\mathcal{L} = \bigoplus_{r\geq 1}\mathfrak{D}^r\mathcal{L}/\mathfrak{D}^{r-1}\mathcal{L}$ とおくと，$\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\,\mathcal{L}$ では多重ゼータ値の**積と低い深さを無視している**ことに注意する。重さ k 深さ r の空間を $\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\,\mathcal{L}_k^{(r)} \cong \mathfrak{D}^r\overline{\mathcal{Z}}_k\big/\big(\mathfrak{D}^{r-1}\overline{\mathcal{Z}}_k + \mathfrak{D}^r\overline{\mathcal{Z}}_k \cap \overline{\mathcal{Z}}_{>0}^2\big)$ とし，$D_k^{(r)} = \dim \mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\,\mathcal{L}_k^{(r)}$ とおくと，$D_k^{(r)}$ は

$$\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\,\overline{\mathcal{Z}} = \bigoplus_{r\geq 1}\mathfrak{D}^r\overline{\mathcal{Z}}/\mathfrak{D}^{r-1}\overline{\mathcal{Z}} \quad \text{（\textbf{深さ次数化多重ゼータ値代数}）}$$

の重さ k 深さ r の代数生成元の個数となる。$D_k^{(r)}$ の明示公式の予想が，ブロードハースト・クライマー予想である。

予想 4. （ブロードハースト・クライマー予想 [1]）

$$\prod_{k,r\geq 1}\frac{1}{(1-x^ky^r)^{D_k^{(r)}}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{1-\mathbb{O}(x)y+\mathbb{S}(x)y^2-\mathbb{S}(x)y^4}$$

ただし，$\mathbb{O}(x) = \frac{x^3}{1-x^2} = x^3+x^5+\cdots$ ，$\mathbb{S}(x) = \frac{x^{12}}{(1-x^4)(1-x^6)} = \sum \dim S_k x^k$ である。

$D_k^{(r)}$ は深さ次数化多重ゼータ値代数の代数生成元の個数であるので，左辺を $x=0, y=0$ の周りで展開したときの x^ky^r の係数は重さ k 深さ r の空間 $\mathfrak{D}^r\overline{\mathcal{Z}}_k/\mathfrak{D}^{r-1}\overline{\mathcal{Z}}_k$ の次元と等しくなる。したがって，予想 4 は，例えば

$$\begin{aligned}\sum_{k>0}\dim\left(\mathfrak{D}^2\overline{\mathcal{Z}}_k/\mathfrak{D}^1\overline{\mathcal{Z}}_k\right)x^k &\stackrel{?}{=} \mathbb{O}(x)^2-\mathbb{S}(x),\\ \sum_{k>0}\dim\left(\mathfrak{D}^3\overline{\mathcal{Z}}_k/\mathfrak{D}^2\overline{\mathcal{Z}}_k\right)x^k &\stackrel{?}{=} \mathbb{O}(x)^3-2\mathbb{O}(x)\mathbb{S}(x)\end{aligned} \tag{4.1}$$

といった予想である。また，$D_k = \sum_{r=1}^{k-1} D_k^{(r)}$ は商代数 $\overline{\mathcal{Z}}$ の代数生成元の個数なので，ザ

ギエの次元予想によれば

$$\frac{1}{1-x^2}\prod_{k\geq 1}\frac{1}{(1-x^k)^{D_k}}=\sum_{k\geq 0}\dim \mathcal{Z}_k x^k \overset{?}{=} \frac{1}{1-x^2-x^3}$$

である。ただし，左辺の $1/(1-x^2)$ は $\zeta(2)$ の寄与である。

さて，これらの記号のもと先の命題 3 の帰結を述べよう。命題 3 は，重さ k 深さ r の多重ゼータ値の母関数が（積と低い深さを無視すれば）$DSh_k^{(r)}$ の基底の $\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\,\mathcal{L}_k^{(r)}$ 上の一次結合でかけるという主張である。係数比較により次の系を得る。

系 5. 整数 $k>r>0$ に対し，

$$D_k^{(r)} \leq \dim DSh_k^{(r)}$$

が成り立つ。ただし，$DSh_k^{(r)}=\{f\in DSh^{(r)} \mid \deg f = k-r\}$ である。

ザギエは等式の成立 $D_k^{(r)} \overset{?}{=} \dim DSh_k^{(r)}$ を予想しているが，$D_k^{(r)}$ の下からの評価は相変わらず難しいので，ここでは議論しない（もちろん，モチビック多重ゼータ値に取り替えれば深さ次数化モチビック関係式族の個数を数える問題となる）。

$D_k^{(r)}$ の上からの評価が（線形代数で）得られるという点において，線形複シャッフル空間の研究は重要である。$DSh_k^{(r)}$ の次元については，すでに先行結果がいくつかあるのでまとめておこう。まず，$\dim DSh_{2k-1}^{(1)}=1$ $(k\geq 1)$ は自明である。$r=2,3$ に対する空間 $DSh_k^{(r)}$ の次元は，ゴンチャロフ，井原・金子・ザギエ [5]，井原・落合などにより得られており，その結果は (4.1) に矛盾しないことがわかっている。

定理 6. (i) $k\not\equiv r \mod 2$ ならば $DSh_k^{(r)}=\{0\}$ である。
(ii) $k\geq 1$ について，

$$\begin{aligned}\dim DSh_k^{(2)} &= \left[\tfrac{k-2}{6}\right] \quad (k:\mathrm{even}),\\ \dim DSh_k^{(3)} &= \left[\tfrac{(k-3)^2-1}{48}\right] \quad (k:\mathrm{odd}).\end{aligned}$$

5　線形複シャッフル空間の代数構造とモジュラー形式

5 節の要点

- DSh のリー代数構造とカスプ形式との直接的な関係
- ブラウンの予想

線形複シャッフル空間 DSh は，伊原括弧積 $\{,\}$ により 2 重次数化リー代数となる。伊原括弧積 $\{,\}$ を定義しよう。双線形写像 $\underline{\circ} : \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_r]\times\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_s]\to\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_{r+s}]$ を $(f,g)\in\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_r]\times\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_s]$ に対し，

$$\begin{aligned}&(f\,\underline{\circ}\,g)(x_1,\dots,x_{r+s})\\&=\sum_{i=0}^{s}f(x_{i+1}-x_i,\dots,x_{i+r}-x_i)g(x_1,\dots,x_i,x_{i+r+1},\dots,x_{r+s})\\&+(-1)^r\sum_{i=1}^{s}f(x_{i+r}-x_{i+r-1},\dots,x_{i+r}-x_i)g(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+r},\dots,x_{r+s})\end{aligned}$$

とし，伊原括弧積を

$$\{f,g\}=f\,\underline{\circ}\,g-g\,\underline{\circ}\,f$$

と定める。双線形写像 $\underline{\circ}$ は結合的ではないが，空間 $\bigoplus_{r\geq1}\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_r]$ は $\{,\}$ により 2 重次数化リー代数となることが確かめられる。部分空間 DSh については，ラシネの結果 ([6, Proposition 4.A.i]) から次の定理を得る。

定理 7. DSh は伊原括弧積 $\{,\}$ によりリー代数となる。

これは，線形複シャッフル方程式の解が伊原括弧積 $\{,\}$ で保たれるという主張である。例えば，DSh の自明な元として x_1^{2n} がとれるが，これに対し，次を得る:

$$\{x_1^{2n},x_1^{2m}\}=(x_1^{2n}-(x_1-x_2)^{2n})x_2^{2m}+((x_2-x_1)^{2n}-x_2^{2n})x_1^{2m}\in DSh^{(2)}.$$

最後に，DSh とカスプ形式との直接的な関係について紹介しよう。これらの関係は，カスプ形式と一対一対応がある偶周期多項式を用いて述べられる。まずは，これを定義しよう。（制限された）偶周期多項式の空間を

$$W^{+,0}:=\{p\in\mathbb{Q}[x_1,x_2]\mid p(x_1,x_2)-p(x_1+x_2,x_2)+p(x_1+x_2,x_1)=0,\ p(x,0)=p(0,x)=0\}$$

とする。よく知られているように，$S_k \cong W_k^{+,0} \otimes \mathbb{C}$ である。

- 深さ 2 の場合のモジュラー現象である，伊原・高尾の関係式 [4] を紹介する。これは，シュネップスにより次のように解釈された。

命題 8. （シュネップス [7]）

$$\sum_{k_1,k_2:\mathrm{odd}} a_{k_1,k_2} x_1^{k_1-1} x_2^{k_2-1} \in W^{+,0} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k_1,k_2:\mathrm{odd}} a_{k_1,k_2} \{x_1^{k_1-1}, x_1^{k_2-1}\} = 0 \quad (5.1)$$

これは，深さ次数化多重ゼータ値代数の深さ 2 の（自由でない）代数生成元の間にカスプ形式からくる関係式があることを示唆する。この関係式のいわば線形版が，ガングル・金子・ザギエの結果である。興味深い結果なので，主張を書いておく。

命題 9. （ガングル・金子・ザギエ [3]）斉次次数 $k-2$ の偶周期多項式 $p \in W^{+,0}$ に対し，$q_{k_1,k_2} \in \mathbb{Q}$ を $\sum_{k_1+k_2=k} \binom{k-2}{k_1-1} q_{k_1,k_2} x_1^{k_1-1} x_2^{k_2-1} = p(x_1+x_2, x_1)$ と定める。このとき，次が成り立つ。

$$\sum_{\substack{k_1,k_2:\mathrm{odd} \\ k_1+k_2=k}} q_{k_1,k_2} \zeta(k_1,k_2) = 0 \quad \text{in } \overline{\mathcal{Z}}_k.$$

- ブロードハースト・クライマー予想によれば，深さ 4 の場合にもモジュラー現象があることが示唆される。これについて，ブラウン [2] により次のような結果が得られている。

定理 10. $p \in W^{+,0}$ に対し, p_1, p_0 を $p = x_1 x_2 p_1 = x_1 x_2 (x_1 - x_2) p_0$ で定める。線形写像 $e : W^{+,0} \to \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_4]$ を

$$e(p) = \sum_{i \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}} p_1(x_{i+4} - x_{i+3}, x_{i+2} - x_{i+1}) + (x_i - x_{i+1}) p_0(x_{i+2} - x_{i+3}, x_{i+4} - x_{i+3})$$

により定める。ただし，$x_0 = 0$ とする。このとき，$e(W^{+,0}) \subset DSh^{(4)}$ となる。

これは，深さ次数化多重ゼータ値代数の深さ 4 の代数生成元を，カスプ形式から具体的に構成する結果である。写像 $e : W^{+,0} \to DSh^{(4)}$ は単射であることが知られている。

最後に，リー代数 DSh の構造に関するブラウンの予想 [2, Conjecture 3] を述べよう。

予想 11. DSh はリー代数として，

$$x_1^{2n}\ (n \geq 1), \quad e(p)\ (p \in W^{+,0})$$

で生成され，関係式は (5.1) のみである。

この予想から DSh の次元の母関数を計算すると，ブロードハースト・クライマー予想の母関数と一致する（詳細は [2] を参照されたい）。

深さフィルトレーション付き多重ゼータ値代数において，モジュラー形式が現れる本質は何であろうか。

参考文献

[1] D. Broadhurst, D. Kreimer, *Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to 9 loops*, Phys. Lett. B **393**, no. 3-4 (1997), 403–412.

[2] F. Brown, *Depth-graded motivic multiple zeta values*, arXiv:1301.3053.

[3] H. Gangl, M. Kaneko, D. Zagier, *Double zeta values and modular forms*, Automorphic forms and Zeta functions", Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa, World Scientific, (2006), 71–106.

[4] Y. Ihara, *Some arithmetic aspects of Galois actions on the pro-p fundamental group of* $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$, in Arithmetic Fundamental Groups and Noncommutative Algebra, Proc. Sympos. Pure Math. 70, Berkeley, CA, 1999, 247–273.

[5] K. Ihara, M. Kaneko, D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math. **142** (2006), 307–338.

[6] G. Racinet, *Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de l'unité*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 95 (2002), 185–231.

[7] L. Schneps, *On the Poisson bracket on the free Lie algebra in two generators*, J. Lie Theory, **16**(1) (2006), 19–37.

[8] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), Progr. Math., **120**, Birkhäuser, Basel (1994), 497–512.