ホッジ理論で次元評価したら失敗した件について

京都大学数理解析研究所　佐久川憲児

1　いいわけ

本サマースクールにおける大きな目標のひとつは多重ゼータ値のはる $\mathbf{Q}$ ベクトル空間の次元評価の概要の解説です (Deligne-Goncharov–Terasoma の定理). ここでは, 直前の山本さんの講演までに明らかとなった情報とホッジ理論（これは良く知られている！）の結果を用いて次元評価を試みます. より具体的には, 以下のような戦略によって次元の評価を試みます:

Step 1 $\mathbf{Q}$ ベクトル空間 $\mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})$ を混合ホッジ・テイト構造の圏から構成する.

Step 2 多重ゼータ値の空間 $\mathcal{Z}$ のホッジ理論的持ち上げである $\mathbf{Q}$ ベクトル空間 $\mathcal{Z}_{\mathrm{H}}$ を $\mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})^{\vee}$ の部分空間*1として定義する.

Step 3 $\mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})$ の次元の評価をする（試みる）.

さて, 実際にこの方法によって次元評価を試みてみると, Step 1,2 は割合自然な方法によって目的は達成されますが, Step 3 がとんでもなく難しい (失敗する。。) ことになります. どういうことかというと, 混合ホッジ・テイト構造の圏があまりにも「大きすぎる」*2ので空間の次元が全く評価できないのです. では, もっと次元評価に適した「小さな」圏があるとうれしいなという話になるのですが, その理想的な圏は次の萩原さんの講演において明らかになります.

2　複素共役付き混合ホッジ・テイト構造

定義 2.1. k を体とする.

(1) V を有限次元 k ベクトル空間とする. V の**上昇フィルター**とは, 部分空間の列

$$0 \subset \cdots \subset W_n V \subset W_{n+1} \subset \cdots \subset W \tag{1}$$

であって, 十分大きな n では $W_n V = V$ となり, 十分小さな n では $W_n V = 0$ となるもののこととする. 添え字が偶数でのみジャンプするとき, 即ち任意の m に対し $W_{2m} V = W_{2m+1} V$ であるとき, このフィルター付きベクトル空間は偶数で添え字付けられている, ということにする.

(2) **複素共役付きの混合ホッジ・テイト構造**とは,

- 偶数で添え字付けられた上昇フィルター付き $\mathbf{Q}$ ベクトル空間 $H_{\mathrm{B}} = (H_{\mathrm{B}}, W_{\bullet} H_{\mathrm{B}})$,
- 二回合成すると恒等写像となる $\mathbf{Q}$ 線型写像 $c\colon H_{\mathrm{B}} \xrightarrow{\sim} H_{\mathrm{B}}$ (対合と呼ぶ),
- 次数付き $\mathbf{Q}$ ベクトル空間 $H_{\mathrm{dR}} = \oplus_{j \in \mathbf{Z}} H_{\mathrm{dR}, j}$,
- $\mathbf{C}$ ベクトル空間の同型

$$\mathrm{comp}^{H}_{\mathrm{dR,B}} = \mathrm{comp}_{\mathrm{dR,B}} \colon H_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} H_{\mathrm{B}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$$

であって, 以下の条件 (a), (b) を満たす組 $H := (H_{\mathrm{B}}, c, H_{\mathrm{dR}}, \mathrm{comp}^{H}_{\mathrm{dR,B}})$ のことである.

*1 明らかではないが, 実際には**部分 $\mathbf{Q}$ 代数**の構造を持つ.

*2 勿論この時点ではこの言説は意味不明である. 第五章を見よ.

(a) $\mathrm{comp}^{H}_{\mathrm{dR},\mathrm{B}}$ は任意の整数 i に対して同型

$$\bigoplus_{j\geq -i} H_{\mathrm{dR},j}\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{C}\xrightarrow{\sim} W_{2i}H_{\mathrm{B}}\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{C}$$

を誘導する.

(b) $c_{\mathrm{B}}, c_{\mathrm{dR}}$ をそれぞれ, $\mathbf{C}$ の複素共役が引き起こす $H_{\mathrm{B}}\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{C}$, $H_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{C}$ 上の $\mathbf{R}$ 線型写像とする. このとき, $(c\otimes \mathrm{id}_{\mathbf{C}})\circ c_{\mathrm{B}} = c_{\mathrm{dR}}$ が成立する.

複素共役付き混合ホッジ・テイト構造の間の射 $H\to H'$ とは二つの線型写像 $H_{\mathrm{B}}\to H'_{\mathrm{B}}$, $H_{\mathrm{dR}}\to H'_{\mathrm{dR}}$ の組であって, 各々のフィルトレーション, 対合, 次数と両立するものをさすことにする. 複付き素共役付き混合ホッジ・テイト構造のなす圏を $\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$ で表す[*3].

注意 2.2. $\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$ は $\mathbf{Q}$ 線型アーベル圏となる.

例 2.3.

(1) n を整数としたとき $\mathbf{Q}(n)_{\mathrm{B}}, \mathbf{Q}(n)_{\mathrm{dR}}$ を

$$\mathbf{Q}(n)_{\mathrm{B}} := \mathbf{Q}(2\pi\sqrt{-1})^n\ (\subset \mathbf{C}),\ \mathbf{Q}(n)_{\mathrm{dR}} := \mathbf{Q}$$

により定める. さて $\mathbf{Q}(n)_{\mathrm{B}}$ 上のフィルトレーションを

$$0 = W_{-2n-2}\mathbf{Q}(n)_{\mathrm{B}}\subset W_{-2n}\mathbf{Q}(n)_{\mathrm{B}} = \mathbf{Q}(n)_{\mathrm{B}}$$

で, 対合 c を複素共役から誘導されるものとし, $1\in \mathbf{Q}(n)_{\mathrm{dR}} = \mathbf{Q}$ の次数は n であると定める. この時, これらの組は複素共役付き混合ホッジ・テイト構造を定め, これを $\mathbf{Q}(n)$ と書くことにする.

(2) 山本氏の講演に於いて出てきた三つ組みが混合ホッジ・テイト構造の一部となることを見よう. $X = \mathbf{A}^1_{\mathbf{Q}}\setminus\{0,1\} = \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}\setminus\{0,1,\infty\}$ とし, 非負整数 N を固定する. まず ${}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{B}}_{\mathbf{0},N} := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}[\pi(X(\mathbf{C});\mathbf{1},\mathbf{0})]/J^{N+1},\mathbf{Q})$ に上昇フィルトレーションを

$$W_{2j}({}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{B}}_{\mathbf{0},N}) := {}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{B}}_{\mathbf{0},j} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}[\pi(X(\mathbf{C});\mathbf{1},\mathbf{0})]/J^{j+1},\mathbf{Q}),\ 0\leq j\leq N$$

で定め, 更に対合 c を $X(\mathbf{C}) = \mathbf{C}\setminus\{0,1\}$ 上の複素共役から誘導される線型写像としてとる. また, ${}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{0},N} := L_N\,{}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{0}}$ 上に次数付きベクトル空間の構造を, 次数 l 部分が

$${}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{0},N,l} := \bigoplus_{\alpha_i\in\{0,1\}}\mathbf{Q}\omega_{\alpha_1}\omega_{\alpha_2}\cdots\omega_{\alpha_l}$$

となるように定める. このとき, これらのなす組

$${}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{H}}_{\mathbf{0},N} := \left(\ {}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{B}}_{\mathbf{0},N}, c,\ {}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{0},N}, \mathrm{comp}_{\mathrm{dR},\mathrm{B}}\right)$$

は複素共役付き混合ホッジ・テイト構造を定める. 更に N について帰納系をなしており, その帰納極限を

$${}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}} := {}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{H}}_{\mathbf{0}} := \varinjlim_{N}{}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{H}}_{\mathbf{0},N}$$

と書くことにする.

[*3] 通常のホッジ構造の定義については, 例えば [3] を参照されたい.

3 $\zeta^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k})$

定義 3.1. (1) $\bullet$ をシンボル B 又は dR とする. このとき, $\mathbf{Q}$ 線型アーベル圏の間の函手

$$\omega_\bullet \colon \mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Vec}_{\mathbf{Q}}^{\mathrm{fin}}$$

を $\omega_\bullet(H) := H_\bullet$ で定める.

(2) $\mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})$ で, $\mathbf{Q}$ 線型自然変換 $\omega_{\mathrm{dR}} \to \omega_{\mathrm{B}}$ の集合を表すことにする. 即ち, $\mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})$ の元 α とは $\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$ の対象で添え字付けられた, $\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$ の射と両立する線型写像

$$\alpha^H \colon \omega_{\mathrm{dR}}(H) := H_{\mathrm{dR}} \to \omega_{\mathrm{B}}(H) := H_{\mathrm{B}}$$

の集合 $\{\alpha^H\}_{H \in \mathrm{Obj}(\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}})}$ のことである.

(3) $\boldsymbol{k}$ をインデックスとしたとき, $\mathbf{Q}$ 線型写像

$$\zeta^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k}) \colon \mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}}) \to \mathbf{Q}$$

を

$$\zeta^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k})(\alpha) := (-1)^{\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})} \langle \alpha_{{}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}}}(\omega(\boldsymbol{k})), \mathrm{dch} \rangle$$

で定める[*4]. ここで, $\omega(\boldsymbol{k}) \in {}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}}$ はインデックス $\boldsymbol{k}$ に対応する微分形式とし (山本氏の講演参照), $\langle\ ,\ \rangle$ は自然なペアリング

$${}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}}^{\mathrm{B}} \times \left({}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}}^{\mathrm{B}}\right)^\vee \to \mathbf{Q}$$

である. $\zeta^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k})$ で生成される $\mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})^\vee$ の $\mathbf{Q}$ 部分空間を $\mathcal{Z}_{\mathrm{H}}$ で表すことにする:

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{H}} := \sum_{\boldsymbol{k}:\mathrm{indices}} \mathbf{Q}\zeta^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k}) \subset \mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})^\vee.$$

注意 3.2. 上の双対 $\mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})^\vee$ は以下のようにして定義する. $\mathcal{C}_\lambda$ を $\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$ の, 対象が有限個であるような忠実充満部分圏の族であって, $2\text{-}\mathrm{colim}_\lambda \mathcal{C}_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$ を満たすものとし, $\omega_\bullet^\lambda$ で $\omega_\bullet$ の $\mathcal{C}_\lambda$ への制限をあらわすことにする. このとき

$$\mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})^\vee := \varinjlim_{\lambda} \mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}^\lambda, \omega_{\mathrm{B}}^\lambda)^\vee$$

で双対を定義する. 但し, 右辺に現れる双対は, 有限次元ベクトル空間の通常の双対である.

$\omega_{\mathrm{dR},k} \colon \mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Vec}_{\mathbf{Q}}^{\mathrm{fin}}$ を ω_{dR} と次数 k 部分を取り出す函手の合成とする[*5]. すると, 定義から自然な直和分解

$$\omega_{\mathrm{dR}} = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} \omega_{\mathrm{dR},k}$$

が存在し, これから再び自然な直和分解

$$\mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})^\vee = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} \mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})_k^\vee = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} \mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR},k}, \omega_{\mathrm{B}})^\vee \tag{2}$$

[*4] ${}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}}$ はホッジ・テイト構造ではない (その帰納極限) が, 以下の双対の定義により代入可能であることがわかる.

[*5] これはファイバー函手ではない.

を得る．この直和分解は $\mathcal{Z}_{\mathrm{H}}$ の直和分解

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{H}} = \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}_{\geq 0}} \mathcal{Z}_{\mathrm{H},k} = \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}_{\geq 0}} \sum_{\boldsymbol{k}:\mathrm{indices},\mathrm{wt}=k} \mathbf{Q}\zeta^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k})$$

を誘導することが定義から容易に確かめられる．

さて, 任意の可換環 R と $\bullet = \mathrm{B}$ 又は dR に対して, 函手 $\omega_{\bullet,R}$ を $\omega_\bullet$ の R 線型拡張とする:

$$\omega_{\bullet,R}\colon \mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Mod}_R; \quad H \mapsto H_\bullet \otimes_{\mathbf{Q}} R.$$

また, $\mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR},R}, \omega_{\mathrm{B},R})$ を上と同様に $\omega_{\mathrm{dR},R}$ と $\omega_{\mathrm{B},R}$ の間の R 線型な自然変換のなす集合とする．すると, 定義より $\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$ の各対象 H に備え付けられている比較写像 $\mathrm{comp}^H_{\mathrm{dR,B}}$ のなす集合

$$\mathrm{comp}_{\mathrm{dR,B}} := \{\mathrm{comp}^H_{\mathrm{dR,B}}\}_{H\in\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}}$$

は $\mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR},\mathbf{C}}, \omega_{\mathrm{B},\mathbf{C}})$ の元を定めている．さて, $\mathrm{comp}_{\mathrm{dR,B}}$ から定まる代入写像 comp^* を

$$\mathrm{comp}^*\colon \mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})^\vee \to \mathbf{C}; \quad F \mapsto F(\mathrm{comp}_{\mathrm{dR,B}})$$

で定める．

命題 3.3. 任意のインデックス $\boldsymbol{k}$ に対し, 次の等式が成立する:

$$\mathrm{comp}^*(\zeta^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k})) = \zeta_{ш}(\boldsymbol{k}).$$

但し右辺はシャッフル正規化多重ゼータ値とする．

Proof. 山本氏のレジュメ例 3.3 と構成から明らか． □

言い換えると, 我々は次の可換図式を得たことになる:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H} \arrow[rr, "\zeta^{\mathrm{H}}"] \arrow[dr, "\zeta_{ш}"'] & & \mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})^\vee =: \mathcal{O}(P^{\mathrm{H}}_{\mathrm{B,dR}}) \arrow[dl, "\mathrm{comp}^*"] \\
& \mathbf{R}. &
\end{tikzcd} \tag{3}$$

$\mathfrak{H}$ はいわゆる Hoffman 代数としており, 唐突に現れた $P^{\mathrm{H}}_{\mathrm{B,dR}}$ については後で解説するが一言でいえばド・ラーム側からベッチ側への「道のホモトピー類」のなす空間である．この図式から, ζ^{H} はシャッフル正規化多重ゼータ値のホッジ理論的持ち上げと呼ぶにふさわしいものであることが了解されるかと思う．

4 淡中圏

以下アファイン群スキームの基礎知識は仮定する．詳細は例えば山本氏のレジュメ 2.1 節や [4] を参照されたい．$\mathcal{T}$ を $\mathbf{Q}$ 線型アーベル圏としたとき, $\mathcal{T}$ の結合的, 単位的かつ可換なテンソル構造とは, $\mathbf{Q}$ 双線型函手

$$\otimes\colon \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$$

と単位的対象 $\mathbf{1}$ の組 $(\otimes, \mathbf{1})$ であって「結合法則」を満足し $\mathbf{1}$ が $\otimes$ の「単位元」となり, 更に「可換」となるときに言った．正確な定義は [2] を参照されたい．本稿に於いて現れるテンソル構造は

全て「結合的」，「単位的」かつ「可換」であるので, 以下この三つの言葉は全て省略してしまうことにしよう．$(\mathcal{T}, \otimes, \mathbf{1})$ を $\mathbf{Q}$ 線型テンソリアルアーベル圏と呼ぶ．更に記号を軽くするために後ろの $\otimes$ と $\mathbf{1}$ は省略してしまうことにする．

$\mathcal{T}$ を $\mathbf{Q}$ 線型テンソリアルアーベル圏で V, W をその対象とする．このとき, 函手

$$\mathcal{T} \to \mathrm{Vec}^{\mathrm{fin}}_{\mathbf{Q}}; \quad V' \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(V' \otimes V, W) \tag{4}$$

が表現可能であるとき, (4) を表現する対象を V と W の**内部準同型**とよび, $\underline{\mathrm{Hom}}(V, W)$ と書く．$W = \mathbf{1}$ のときには慣例に従って $V^\vee := \underline{\mathrm{Hom}}(V, \mathbf{1})$ と書き, V の双対と呼ぶことにする．

定義 4.1. **$\mathbf{Q}$ 線型ニュートラル淡中圏**とは, $\mathbf{Q}$ 線型テンソリアルアーベル圏であって以下の条件を満たすもののことをいう:

Ref 任意の対象 V, W に対して, 内部準同型 $\underline{\mathrm{Hom}}(V, W)$ は存在し, 自然な射

$$V \to (V^\vee)^\vee$$

は同型．

Rig 任意の対象 V, W に対し, 自然な射

$$V^\vee \otimes W \to \underline{\mathrm{Hom}}(V, W)$$

は同型であり, 更に双対を取る操作とテンソル積は函手的に可換である:

$$(V \otimes W)^\vee \cong V^\vee \otimes W^\vee.$$

Fib 自然な射 $\mathbf{Q} \to \mathrm{End}(\mathbf{1})$ は同型であり, 完全でテンソル構造を両立させる $\mathbf{Q}$ 線型函手

$$\omega\colon \mathcal{T} \to \mathrm{Vec}^{\mathrm{fin}}_{\mathbf{Q}}$$

が存在する．このような函手のことを**ファイバー函手**と呼ぶ．

例 4.2. (1) $\mathrm{GrVec}^{\mathrm{fin}}_{\mathbf{Q}}$ を有限次元次数付き $\mathbf{Q}$ ベクトル空間とすると, これは $\mathbf{Q}$ 線型ニュートラル淡中圏となる．次数を忘れる函手はファイバー函手となっている．

(2) 前前節に於いて現れた $\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$ は $\mathbf{Q}$ 線型ニュートラル淡中圏であり, 二つの函手

$$\omega_{\mathrm{dR}},\ \omega_{\mathrm{B}}\colon \mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Vec}^{\mathrm{fin}}_{\mathbf{Q}}$$

はそのファイバー函手となっている．

定理 4.3 (淡中圏論の基本定理)**.** $\mathcal{T}$ を $\mathbf{Q}$ 線型ニュートラル淡中圏とし, ω, ω' を $\mathcal{T}$ のファイバー函手とする．

(1) 函手 $P_{\omega', \omega}\colon \mathrm{Alg}_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Set}$ を

$$P_{\omega', \omega}(R) := \{\alpha \in \mathrm{Hom}_R(\omega_R, \omega'_R) \mid \alpha\text{はテンソル構造と両立する}\}$$

で定めると, これは $\mathbf{Q}$ 上のアファインスキームとなる．特に $\omega = \omega'$ の時には $P_{\omega,\omega}(R) = \mathrm{Aut}^{\otimes}_{\mathcal{T}}(\omega)(R)$ に自然な群構造が入るので, $G_\omega := P_{\omega,\omega}$ は $\mathbf{Q}$ 上のアファイン群スキームとなる．更に, 自然な同型

$$\mathcal{O}(P_{\omega', \omega}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(\omega, \omega')^\vee \tag{5}$$

が存在する.

(2) ファイバー函手 ω は圏同値

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}}(G_\omega); \quad V \mapsto \omega(V)$$

を誘導する. G_ω はしばしば $\pi(\mathcal{T},\omega)$ と書かれ, ω を基点とする $\mathcal{T}$ の淡中基本群と呼ばれる
.

(3) G をアファイン群スキームとする. $\mathcal{T}$ $=\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}}(G)$ で ω が忘却函手であるとき, G と $\pi_1(\mathcal{T},\omega)$ は自然に同型となる.

例 4.4. $\mathcal{T} = \mathrm{GrVec}_{\mathbf{Q}}^{\mathrm{fin}}$, $\omega = \omega_f :=$ 物忘れ函手であるとき,

$$\pi_1(\mathrm{GrVec}_{\mathbf{Q}}^{\mathrm{fin}}, \omega_f) = \mathbf{G}_m$$

となる. 上の定理から, 有限次元 $\mathbf{Q}$ ベクトル空間に次数を付けることと $\mathbf{G}_m$ の作用を考える事は同値となることがわかる. 具体的な対応については萩原氏の講演レジュメも参照されたい.

アファインスキーム $P_{\omega',\omega}$ が $\mathbf{Q}$ 有理点 t をもつならば, アファインスキームの同型

$$G_\omega \xrightarrow{\sim} P_{\omega',\omega}; \quad \sigma \mapsto t \circ \sigma \tag{6}$$

が存在する.

例 4.5. $\mathcal{T}$ として $\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$ を, ω, ω' として $\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}}$ をとろう. また, $\mathbf{Q}$ 上のアファイン (resp. 群) スキーム $P_{\mathrm{B,dR}}^{\mathrm{H}}$ (resp. $G_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{H}}$) を

$$P_{\mathrm{B,dR}}^{\mathrm{H}} := P_{\omega_{\mathrm{B}},\omega_{\mathrm{dR}}}, \quad G_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{H}} := G_{\omega_{\mathrm{dR}}}$$

で定義する. すると, 定理 4.3 (1) より, 自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})^\vee \cong \mathcal{O}(P_{\mathrm{B,dR}}^{\mathrm{H}})$$

が存在する. 実は $P_{\mathrm{B,dR}}^{\mathrm{H}}$ には $\mathbf{Q}$ 有理点が稠密に存在し, 適当にそのなかのどれかを選べば関数環の次数を保つ同型

$$G_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{H}} \xrightarrow{\sim} P_{\mathrm{B,dR}}^{\mathrm{H}} \tag{7}$$

が存在することがわかる. 従って上の二つの事実を合わせると, $\mathcal{O}(P_{\mathrm{B,dR}}^{\mathrm{H}})_k^\vee$ の次元を評価することと $\mathcal{O}(G_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{H}})_k$ の次元を評価することは同値であることがわかる[*6].

観察 4.6. $\mathcal{O}(G_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{H}})_k$ が仮に次元が小さい $\mathbf{Q}$ ベクトル空間であれば, その部分空間である $\mathcal{Z}_{\mathrm{H},k}$ も次元が小さい $\mathbf{Q}$ ベクトル空間である.

5 $\mathcal{Z}_{\mathrm{H},k}$ の評価への挑戦

まず副冪単代数群 U が与えられているとする.

[*6] 次数については (2) を参照.

補題 5.1. 次の自然な同型が存在する:

$$\mathcal{O}(U) \cong \widehat{\mathcal{U}}(\mathrm{Lie}(U))^\vee.$$

但し $\widehat{\mathcal{U}}(\mathrm{Lie}(U))$ は完備化された $\mathrm{Lie}(U)$ の普遍包絡環とする.

この補題より, U の関数環を調べることと $\mathrm{Lie}(U)$ を調べることは同値である. さて, G を $\mathbf{Q}$ 上のアファイン群スキームであって半直積

$$G = U \rtimes \mathbf{G}_m \tag{8}$$

で書けているものとする.

補題 5.2. 任意の非負整数 i に対して次の自然な同型が存在する:

$$H^i(\mathrm{Lie}(U)) \cong \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(G)}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}(n)). \tag{9}$$

ここで, $\mathbf{Q}(n)$ に G は自然な全射 $G \twoheadrightarrow \mathbf{G}_m$ を経由して作用しているとする.

ここで, $i = 1, 2$ の時にリー環のコホモロジー $H^i(\mathrm{Lie}(U))$ の意味を思い出す. まず $i = 1$ の時, 自然な全射

$$\mathrm{Lie}(U) \twoheadrightarrow H^1(\mathrm{Lie}(U))^\vee \tag{10}$$

が存在する. 更に, (10) は次のような性質を持っている:
(**Gen**) $\{l_i\}_i \subset \mathrm{Lie}(U)$ を (10) での像が一時独立で稠密なベクトル空間を生成しているのであれば, $\{l_i\}$ は $\mathrm{Lie}(U)$ を位相的に生成する.
即ち, $H^1(\mathrm{Lie}(U))$ は $\mathrm{Lie}(U)$ **の極小位相的生成系のはるベクトル空間の双対**と同一視できる. 次に $i = 2$ の時を考えよう. $H^1(\mathrm{Lie}(U))^\vee$ の位相的基底 $\{l_i\}_i$ を一つ固定し, それらで生成される副冪単リー代数を $\mathfrak{f}$ と書くことにする. 性質 (Gen) から, 全射

$$\mathfrak{f} \twoheadrightarrow \mathrm{Lie}(U) \tag{11}$$

が存在するが, この核を $\mathfrak{r}$ とかくことにしよう*7. すると自然な同型

$$\mathfrak{r}/[\mathfrak{f}, \mathfrak{r}] \xrightarrow{\sim} H^2(\mathrm{Lie}(U))^\vee \tag{12}$$

が存在することが示せる. (12) の左辺は $\mathrm{Lie}(U)$ の**本質的な関係式のなす空間**とみなせることに注意すれば, $H^2(\mathrm{Lie}(U))$ は $\mathrm{Lie}(U)$ **の本質的な関係式の双対空間**と同一視できることがわかる.

さて, もともとの状況に戻ることにする. U_{dR} を $G^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}}$ の副冪単根基としたとき, 自然な同一視

$$G^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}} = U^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}} \rtimes \mathbf{G}_m \tag{13}$$

が存在することが知られている.

補題 5.3. (1) 任意の整数 n に対し, $\mathrm{Ext}^2_{\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}(n))$ は消滅する.
(2) 任意の**非正**整数 n に対し, $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}(n))$ は消滅する.

---

*7 つまりこれは生成元たちの間の関係式のなす空間である.

(3) 任意の 1 以上の整数に対し, 以下の自然な同型が存在する:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}(n)) \xleftarrow{\sim} \left(\mathbf{C}/(2\pi\sqrt{-1})^n \mathbf{Q}\right)^{c=-1}. \tag{14}$$

ここで c は $\mathbf{C}$ 上の複素共役から誘導される射とする.

系 5.4. $\mathrm{Lie}(U^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}})$ は $\mathbf{Q}$ 上非可算生成自由リー代数の副冪零完備化と同型である. 更に, 任意の正整数 k に対して $\mathcal{O}(U^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}})_k$ は非可算階数 $\mathbf{Q}$ ベクトル空間である. 特に

$$\dim_{\mathbf{Q}} \mathcal{Z}_{\mathrm{H},k} \leq \aleph.$$

従って, 残念ながらこの方法では $\mathcal{Z}_{\mathrm{H},k}$ が有限次元であることさえ帰結されない*8!

6 まとめ, なぜ混合テイトモチーフなのか

(現実) 「**大きな**」圏=拡大群の次元が大きな淡中圏 $\Rightarrow \mathcal{O}(U^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}})_k$ が巨大 ⇒MZVs は評価できない.

$$\updownarrow$$

(理想) 「**小さな**」圏=拡大群の次元が小さな淡中圏 ⇒ “$\mathcal{O}(U^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}})_k$” が小さい ⇒MZVs が評価できるかも?

適切な $\mathrm{MHT}_{\mathbf{Q}}$ の小さな部分圏を見つければ, 「同様な方法」で多重ゼータ値を持ち上げることにより次元評価ができる*9. この目的に適しているのが**混合テイトモチーフの圏**である (萩原氏の講演参照).

注意 6.1. $\mathcal{Z}_{\mathrm{mot},k}$ を重さ k のモチーフ的多重ゼータ値の空間とすると, 自然な同型

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{mot},k} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}_{\mathrm{H},k}$$

が存在する. 実は我々の構成した持ち上げ自体は非常に**良い**ものなのである. この事実は混合テイトモチーフの圏からのホッジ実現函手が忠実充満であることから従う.

参考文献

[1] P. Deligne, Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, Galois groups over $\mathbf{Q}$ (Berkeley, CA, 1987), 79–297, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, **16**, Springer, New York, 1989.

[2] P. Deligne, J. Milne, Tannakian categories, in Hodge Cycles, Motives and Shimura varieties, Lecture Notes in Math., **900**, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[3] C. Peters, E. Steenbrink, Mixed Hodge Structures, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. **52** (2008).

[4] 佐久川憲児, アファインスキームとホップ代数, 本サマースクールホームページ.

*8 重さ k の指数は有限個しかないのだから, 有限次元であることは明らかなのである.

*9 実際にはより難しい. $\mathbf{G}_m$ の部分が実はかなり悪さをするので, 「部分コンパクト化」することによりその悪い部分を消しておく必要がある.