多重ゼータ関数の解析接続と負の整数点での極限値

小野塚友一

1　多重ゼータ関数の定義と絶対収束領域

多重ゼータ関数は次の級数により定義される.

$$\zeta(s_1,\dots,s_r) := \sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_r} \frac{1}{m_1^{s_1} m_2^{s_2} \cdots m_r^{s_r}}$$

ただし $s_1,\dots,s_r$ は正の整数の組ではなく複素数の組 $\mathbb{C}^r$ をとるものとする. このように多重ゼータ値の変数を複素変数にすることでできる多変数複素関数が多重ゼータ関数である. この級数の収束性については次の事実が知られている.

Proposition 1.1 (松本 [10])**.** 多重ゼータ関数は次の全ての不等式を満たす領域で絶対収束する.

$$\begin{aligned}
&\Re(s_r) > 1\\
&\Re(s_{r-1}+s_r) > 2\\
&\qquad\vdots\\
&\Re(s_1+\cdots+s_r) > r
\end{aligned}$$

Proof. $\sigma > 1$ に対して次の評価が成り立つ.

$$\sum_{M<m} \frac{1}{m^\sigma} \le \int_M^\infty \frac{dx}{x^\sigma} \le \frac{M^{1-\sigma}}{\sigma-1} \tag{1.1}$$

この評価を用いて証明する. 以下では $\Re(s_j) = \sigma_j$ と書くこととし, 証明には r についての帰納法を用いる. $r=1$ のとき

$$\zeta(s_1) = \sum_{m_1=1}^\infty \frac{1}{m_1^{s_1}}$$

はリーマンゼータ関数であり (1.1) より $\sigma_1 > 1$ において絶対収束する. $r-1$ のときに Proposition 1.1 が成り立つと仮定し, r の場合を考える. $\sigma_r > 1$ のとき (1.1) より

$$\begin{aligned}
\sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_r} \frac{1}{m_1^{\sigma_1} m_2^{\sigma_2} \cdots m_r^{\sigma_r}} &= \sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_{r-1}} \frac{1}{m_1^{\sigma_1} \cdots m_{r-1}^{\sigma_{r-1}}} \sum_{m_{r-1}<m_r} \frac{1}{m_r^{\sigma_r}}\\
&\le \frac{1}{\sigma_r - 1} \sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_{r-1}} \frac{1}{m_1^{\sigma_1} \cdots m_{r-1}^{\sigma_{r-1}+\sigma_r-1}}
\end{aligned}$$

が成り立ち, 最後の級数は帰納法の仮定より次の不等式を全て満たす領域で絶対収束する.

$$\begin{aligned}
&\Re(s_{r-1}+s_r-1) > 1\\
&\Re(s_{r-2}+s_{r-1}+s_r-1) > 2\\
&\qquad\vdots\\
&\Re(s_1+\cdots+s_r-1) > r-1
\end{aligned}$$

これらの不等式は次の不等式に書き換えることができる.

$$\begin{aligned}
&\Re(s_{r-1}+s_r) > 2\\
&\Re(s_{r-2}+s_{r-1}+s_r) > 3\\
&\qquad\vdots\\
&\Re(s_1+\cdots+s_r) > r
\end{aligned}$$

最終的に得られた不等式と (1.1) を適用するために用いた不等式 $\sigma_r > 1$ を合わせることで Proposition 1.1 を得る. □

2　多重ゼータ関数の有理型接続

前章では多重ゼータ関数の定義を与えたが, この定義は絶対収束領域上での定義でしかない. そうなるとより広い範囲に解析接続できるのか, といったことが疑問になるが, これは可能である. 実際, Zhao[19] と秋山-江上-谷川 [1] はそれぞれ独立に多重ゼータ関数の解析接続を与えた. Zhao は超関数を用いて解析接続を与え, 秋山-江上-谷川は Euler-Maclaurin の和公式を用いて解析接続を与えた. この章では秋山-江上-谷川の証明を紹介することにより, 多重ゼータ関数の解析接続を与え, 更には証明を追うことで極の位置も決定する.

Proposition 2.1 (秋山-江上-谷川 [1])**.** 多重ゼータ関数 $\zeta(s_1,\ldots,s_r)$ は $\mathbb{C}^r$ 上に有理型に接続できる. 極は次の各式により与えられ, 全て 1 位である.

$$\begin{aligned}
&s_r = 1\\
&s_{r-1}+s_r = 2,1,0,-2,-4,\ldots\\
&\sum_{j=1}^{k} s_{r-j+1} \in \mathbb{Z}_{\le k}\ (k=3,4,\ldots,r).
\end{aligned}$$

Remark. 極が $s_{r-1}+s_r=2$ で与えられるとは, 具体的には次の超平面が極になっているということを意味する.

$$\{(s_1,\ldots,s_r)\in\mathbb{C}^r \mid s_{r-1}+s_r=2\}$$

1 変数複素関数論では極といえば “点” のイメージだったかもしれないが, 多重ゼータ関数, あるいはもっと一般に多変数複素関数では極は “超平面” となる.

Proof. ここでは $r=2$ の場合についてのみ証明を与える. これから使う記号として次の 2 つを定義しておく.

$$\begin{aligned}
&(s)_l := s(s+1)\cdots(s+l-1)\\
&B_l\ :\ \text{ベルヌーイ数}
\end{aligned}$$

Euler-Maclaurin の和公式より, $L\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対し次の式が得られる.

$$\sum_{m=M+1}^{\infty}\frac{1}{m^s} = \frac{M^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2M^s} + \sum_{l=1}^{L}(s)_l\frac{B_{l+1}}{(l+1)!}\frac{1}{M^{s+l}} - \phi_L(M,s)$$

ただし $\phi_L(M,s)$ は整関数であり次のように評価される.

$$\phi_L(M,s) = O\left(|(s)_{L+1}|M^{-\sigma-L-1}\right)$$

この式を 2 重ゼータ関数に代入することで次式を得る.

$$
\begin{aligned}
&\zeta(s_1, s_2)\\
&= \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^{s_1}} \sum_{m_2=m_1+1}^{\infty} \frac{1}{m_2^{s_2}}\\
&= \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^{s_1}} \left(\frac{m_1^{1-s_2}}{s_2-1} - \frac{1}{2m_1^{s_2}} + \sum_{l=1}^{L} (s_2)_l \frac{B_{l+1}}{(l+1)!} \frac{1}{m_1^{s_2+l}} - \phi_L(m_1, s_2) \right)\\
&= \frac{1}{s_2-1}\zeta(s_1+s_2-1) - \frac{1}{2}\zeta(s_1+s_2) + \sum_{l=1}^{L} (s_2)_l \frac{B_{l+1}}{(l+1)!}\zeta(s_1+s_2+l) - \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{\phi_L(m_1, s_2)}{m_1^{s_1}}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

最後の式がどの範囲で正則か見てみよう. 初項は $s_2 = 1$ と $s_1 + s_2 = 2$ が極でそれ以外の場所では正則である. 第 2 項は $s_1 + s_2 = 1$ が極, 第 3 項は $s_1 + s_2 = 0, -2, -4, \ldots$ が極になりそれ以外の場所では正則である. ($B_3, B_5, \ldots = 0$ より $s_1 + s_2 = -1, -3, \ldots$ は極にならないことに注意.) 最後の項は上から

$$
O\left(\sum_{m_1=1}^{\infty} |(s_2)_{L+1}| m_1^{-\sigma_1-\sigma_2-L-1} \right)
$$

により評価できるので $\sigma_1 + \sigma_2 > -L$ という範囲で正則になる. これはどんな非負整数 L に対しても成り立つので L を十分大きく取ることにより必要な範囲の有理型接続が得られる. □

3 多重ゼータ関数の負の整数での極限値

多重ゼータ関数が負の範囲まで接続できることを前章で見た. そこで負の整数点における多重ゼータ関数の値を調べてみたくなる. 式 (2.1) を用いることで, 2 重ゼータ関数の特別な場合については調べることができる. いま $(s_1, s_2) = (-n_1, -n_2) \in (\mathbb{Z}_{\le -1})^2$ という点での特殊値を考えてみよう. 極を避けるために $n_1 + n_2 \equiv 1 \pmod 2$ という条件を付けて (2.1) に代入すると, リーマンゼータ関数の自明な零点がほとんどの項を消し

$$
\zeta(-n_1, -n_2) = -\frac{1}{2}\zeta(-n_1 - n_2) = \frac{B_{n_1+n_2+1}}{2(n_1+n_2+1)}
$$

が得られる. このように多重ゼータ関数の負の整数点での値をどんどん計算していければ良いのだが, そういうわけにはいかない. というのも, 今計算した点以外の負の整数点は Proposition 2.1 より極になっているからである. では全く調べられないのかというと, そういうわけではない. 実は負の整数点は多重ゼータ関数の不確定特異点になることが知られている. 例えば次のような式が示されている (佐々木 [18]).

$$
\lim_{s_3\to 0}\lim_{s_2\to 0}\lim_{s_1\to 0}\zeta(s_1, s_2, s_3) = -\frac{3}{8}
$$
$$
\lim_{s_1\to 0}\lim_{s_2\to 0}\lim_{s_3\to 0}\zeta(s_1, s_2, s_3) = -\frac{1}{4}
$$

この例ではどちらも $\zeta(s_1, s_2, s_3)$ の $(0, 0, 0)$ への極限値を与えている. $(0, 0, 0)$ は 3 重ゼータ関数の極であるが極限値を持っており, しかもその極限値は近づき方によって異なる値に収束する. このように多重ゼータ関数は一般に非正の整数点が極となるが, 極限値を考えることができ, その値は極限のとり方によって異なる.

こういった極限値についての結果を紹介するために, 次の記号を用意する.

$$\begin{aligned}
n_r(j) &:= n_j + n_{j+1} + \cdots + n_r \\
p_r(j) &:= p_j + p_{j+1} + \cdots + p_r \\
\varepsilon_r(j) &:= \varepsilon_j + \varepsilon_{j+1} + \cdots + \varepsilon_r \\
[a]_n &:= \begin{cases} a(n-1)! & (n \geq 1) \\ (-1)^n(-n)!^{-1} & (n \leq 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

Theorem 3.1 (O.[17]). $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r \in \mathbb{C}$ は次の 3 条件を満たしながら極限 $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \to (0, \ldots, 0)$ をとるものとする.

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r \neq 0 \\
&\varepsilon_r(1), \ldots, \varepsilon_r(r) \neq 0 \\
&\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_r(j)} \ll 1 \quad ((\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \to 0,\ 1 \leq j \leq k \leq r)
\end{aligned}$$

このとき $(-n_1, \ldots, -n_r) \in (\mathbb{Z}_{\leq 0})^r$ への極限値は次のように表せる.

$$\begin{aligned}
&\zeta(-n_1 + \varepsilon_1, \ldots, -n_r + \varepsilon_r) \\
&= (-1)^{n_r} n_r! \sideset{}{'}\sum_{\substack{p_1 + \cdots + p_r = n_r(1) + r \\ p_1, \ldots, p_r \geq 0}} \frac{B_{p_1} \cdots B_{p_r}}{p_1! \cdots p_r!} \prod_{j=2}^{r} \frac{[\varepsilon_r(j)]_{-n_r(j) - r + j + p_r(j) - 1}}{[\varepsilon_r(j-1)]_{-n_r(j-1) - r + j + p_r(j) - 1}} + \sum_{j=1}^{r} O(\varepsilon_j)
\end{aligned}$$

ただし $\sum'$ は各 $j = 2, \ldots, r$ に対し次のどちらかが成り立つような $(p_1, \ldots, p_r) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r$ を走るものとする.

$$-n_r(j) - r + j + p_r(j) < 2 \quad \text{または} \quad -n_r(j-1) - r + j + p_r(j) \geq 2$$

以上が極限値についての定理であるが, 式が複雑なので具体例を以下に記す. まず 2 重ゼータ関数に対しては次のような極限値が得られる.

$$\begin{aligned}
\zeta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} + \sum_{j=1}^{2} O(\varepsilon_j) \\
\zeta(-1 + \varepsilon_1, -1 + \varepsilon_2) &= \frac{1}{360} + \frac{1}{720} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} + \sum_{j=1}^{2} O(\varepsilon_j)
\end{aligned}$$

同様に 3 重ゼータ関数の場合は次のようになる.

$$\begin{aligned}
\zeta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{24} \cdot \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3} - \frac{1}{24} \cdot \frac{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3} + \sum_{j=1}^{3} O(\varepsilon_j) \\
\zeta(-1 + \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) &= -\frac{17}{720} - \frac{1}{144} \cdot \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3} + \frac{1}{720} \cdot \frac{-\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3} + \sum_{j=1}^{3} O(\varepsilon_j) \\
\zeta(\varepsilon_1, -1 + \varepsilon_2, \varepsilon_3) &= -\frac{19}{360} + \frac{1}{360} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3} + \sum_{j=1}^{3} O(\varepsilon_j) \\
\zeta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, -1 + \varepsilon_3) &= -\frac{3}{40} - \frac{1}{720} \cdot \frac{4\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3} + \sum_{j=1}^{3} O(\varepsilon_j)
\end{aligned}$$

ここまでの例では分母, 分子共に ε_j の 1 次式となっていた. 4 重ゼータ関数以降は 2 次式以上の項も登場する.

$$
\begin{aligned}
\zeta(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4) &= \frac{1}{5}+\frac{1}{36}\cdot\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3+\varepsilon_4}+\frac{1}{48}\cdot\frac{\varepsilon_3+2\varepsilon_4}{\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4} \\
&\quad +\frac{1}{720}\cdot\frac{19\varepsilon_2+33\varepsilon_3+52\varepsilon_4}{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4}+\frac{1}{144}\cdot\frac{\varepsilon_4(\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)}{(\varepsilon_3+\varepsilon_4)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)}+\sum_{j=1}^{4}O(\varepsilon_j)
\end{aligned}
$$

Proof. ここでは証明のスケッチのみを述べるが, 特に極限値の求め方に的を絞って見ていくこととする. まずリーマンゼータ関数の場合と同様にして次の積分表示を導き出すことができる.

$$
\zeta(s_1,\ldots,s_r)=\frac{1}{\Gamma(s_1)\cdots\Gamma(s_r)}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\frac{t_1^{s_1-1}\cdots t_r^{s_r-1}}{\prod_{j=1}^r(e^{t_j+\cdots+t_r}-1)}dt_1\cdots dt_r
$$

この積分に対して $t_j=x_1\cdots x_j(1-x_{j+1})$ (ただし $x_{r+1}=0$) により変数変換すると

$$
\begin{aligned}
\zeta(s_1,\ldots,s_r) &= \frac{1}{\Gamma(s_1)\cdots\Gamma(s_r)}\times \\
&\quad \int_0^1\cdots\int_0^1\int_0^\infty\prod_{j=1}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2}\prod_{j=2}^r(1-x_j)^{s_{j-1}-1}\prod_{j=1}^r\frac{x_1\cdots x_j}{e^{x_1\cdots x_j}-1}dx_1\cdots dx_r
\end{aligned}
$$

この積分区間を次のように 2 つに分割する.

$$
\int_0^1\cdots\int_0^1\int_0^\infty=\int_0^1\cdots\int_0^1\int_0^1+\int_0^1\cdots\int_0^1\int_1^\infty
$$

すると極限値として表れるのは最初の積分区間のみで, 後ろの積分区間は負の部分まで有理型接続でき誤差項になる. そのためここでは最初の積分区間のみ計算を進めていく. 最初の積分区間についてテイラー展開 $x/(e^x-1)=\sum_{m=0}^\infty(B_m/m!)x^m$ $(|x|<2\pi)$ を代入すると

$$
\frac{1}{\Gamma(s_1)\cdots\Gamma(s_r)}\int_0^1\cdots\int_0^1\prod_{j=1}^r x_j^{s_r(j)-r+j-2}\prod_{j=2}^r(1-x_j)^{s_{j-1}-1}\prod_{j=1}^r\left(\sum_{k=0}^\infty\frac{B_k}{k!}(x_1\cdots x_j)^k\right)dx_1\cdots dx_r
$$

これにより積分の中に無限和が現れるが, その無限和を次のように 2 つに分割する.

$$
\begin{aligned}
\prod_{j=1}^r\sum_{k=0}^\infty\frac{B_k}{k!}(x_1\cdots x_j)^k &= \sum_{k=0}^\infty\sum_{p_1+\cdots+p_r=k}\frac{B_{p_1}\cdots B_{p_r}}{p_1!\cdots p_r!}x_1^{p_r(1)}x_2^{p_r(2)}\cdots x_r^{p_r(r)} \\
&= \sum_{p_1+\cdots+p_r=n_r(1)+r}\frac{B_{p_1}\cdots B_{p_r}}{p_1!\cdots p_r!}x_1^{p_r(1)}x_2^{p_r(2)}\cdots x_r^{p_r(r)} \\
&\quad +\sum_{\substack{k=0\\ k\neq n_r(1)+r}}^\infty\sum_{p_1+\cdots+p_r=k}\frac{B_{p_1}\cdots B_{p_r}}{p_1!\cdots p_r!}x_1^{p_r(1)}x_2^{p_r(2)}\cdots x_r^{p_r(r)}
\end{aligned}
$$

このように 2 つの和に分けたとき, 極限値の主要項になるのは初項で, 第 2 項は負の部分まで有理型接続でき誤差項になる. そこで初項の積分のみを計算すると

$$
\frac{1}{\Gamma(s_1)\cdots\Gamma(s_r)}\sum_{p_1+\cdots+p_r=n_r(1)+r}\frac{B_{p_1}\cdots B_{p_r}}{p_1!\cdots p_r!}\frac{1}{s_r(1)+n_r(1)}\prod_{j=2}^r\frac{\Gamma(s_r(j)-r+j+p_r(j)-1)\Gamma(s_{j-1})}{\Gamma(s_r(j-1)-r+j+p_r(j)-1)}
$$

のようにガンマ関数で表せ, この表示により負の部分まで有理型接続できる. $(s_1,\ldots,s_r)=(-n_1+\varepsilon_1,\ldots,-n_r+\varepsilon_r)$ を代入し, 更に $\Gamma(a+n)=(a)_n\Gamma(a)$ という式を使うことで, 次のように式変形

できる.

$$\frac{1}{\Gamma(s_1)\cdots\Gamma(s_r)}\prod_{j=2}^{r}\frac{\Gamma(s_r(j)-r+j+p_r(j)-1)\Gamma(s_{j-1})}{\Gamma(s_r(j-1)-r+j+p_r(j)-1)}$$
$$=\frac{1}{(\varepsilon_r)_{-n_r}\Gamma(\varepsilon_r(1))}\prod_{j=2}^{r}\frac{(\varepsilon_r(j))_{-n_r(j)-r+j+p_r(j)-1}}{(\varepsilon_r(j-1))_{-n_r(j-1)-r+j+p_r(j)-1}}$$

さらに右辺の最初の部分は次のように評価できる.

$$\frac{1}{(\varepsilon_r)_{-n_r}\Gamma(\varepsilon_r(1))}=\big((-1)^{n_r}n_r!+O(\varepsilon_r)\big)\left(\frac{\sin(\pi\varepsilon_r(1))}{\pi}\Gamma(1-\varepsilon_r(1))\right)$$
$$=(-1)^{n_r}n_r!\varepsilon_r(1)+O(\varepsilon_r(1)^2)+O(\varepsilon_r(1)\varepsilon_r)$$

これまでの計算をまとめ, 次の式を得る.

$$\zeta(-n_1+\varepsilon_1,\ldots,-n_r+\varepsilon_r)$$
$$=(-1)^{n_r}n_r!\sum_{\substack{p_1+\cdots+p_r=n_r(1)+r\\ p_1,\ldots,p_r\geq 0}}\frac{B_{p_1}\cdots B_{p_r}}{p_1!\cdots p_r!}\prod_{j=2}^{r}\frac{(\varepsilon_r(j))_{-n_r(j)-r+j+p_r(j)-1}}{(\varepsilon_r(j-1))_{-n_r(j-1)-r+j+p_r(j)-1}}+(\text{誤差})$$

これでほとんど定理の式になっている. 主要項の中に誤差となるべきものがまだ含まれており, それを取り除くために $\sum'$ や $[a]_n$ を用いる. □

4 最後に

この講演では多重ゼータ関数の絶対収束領域や解析接続など基本的なことのみを扱った. 多重ゼータ関数の研究は他にも多岐にわたっている. 例えば次のようなことが研究されている.

- 関数等式 [11]
- 平均値 [3][5][14]
- オーダー評価 [6][7][8][9]
- 零点 [12][16]
- 普遍性 [15][16]
- 関数関係式 [2][4][13]

最後の関数関係式について少し紹介しよう. 多重ゼータ値の間の関係式についてはこれまでの講演でいくつも見てきた. これらの関係式が整数点のみでなくより広い範囲で成り立たないか, ということを調べるのが関数関係式の研究である. 例えば $k_1,k_2\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対して

$$\zeta(k_1)\zeta(k_2)=\zeta(k_1,k_2)+\zeta(k_2,k_1)+\zeta(k_1+k_2)$$

という関係式が成り立つが, この式は k_1 と k_2 を複素数 s_1 と s_2 に取り替えてもそのまま成り立つ. また $k\in\mathbb{Z}_{\geq 3}$ に対して和公式

$$\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ k_1\geq 1,k_2\geq 2}}\zeta(k_1,k_2)=\zeta(k)$$

が知られているが, これは $\Re(s) > 1$ で成り立つ

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\zeta(s-n-2, n+2) - \zeta(-n, s+n)) = \zeta(s)$$

という関係式の $s = k$ の部分に過ぎない (広瀬-村原-O.[2]). このように関数関係式がより広い範囲に拡張可能かどうか調べることがこの研究のメインテーマとなっている.

関数関係式以外の研究項目については詳しく述べないが, 代表的な文献を載せておいた. どの研究も道半ばであり調べるべきことがたくさん残っている. 興味のある人は是非, 多重ゼータ関数の研究に参加しよう!

参考文献

[1] S. Akiyama, S. Egami, and Y. Tanigawa, *An analytic continuation of multiple zeta functions and their values at non-positive integers*, Acta Arith., **98** (2001), 107–116.

[2] M. Hirose, H. Murahara, and T. Onozuka, *Sum formula for multiple zeta function*, arXiv:1808.01559.

[3] S. Ikeda and K. Matsuoka, *On certain mean values of multiple zeta-functions*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **64** (2015), 19–17.

[4] S. Ikeda and K. Matsuoka, *On the functional relations for the Euler-Zagier multiple zeta-functions*, Tokyo J. Math., advance publication.

[5] S. Ikeda, K. Matsuoka, and Y. Nagata, *On certain mean values of the double zeta-function*, Nagoya Math. Journal **217** (2015), 161–190.

[6] H. Ishikawa and K. Matsumoto, *On the estimation of the order of Euler-Zagier multiple zeta-functions*, Illinois J. Math., **47**, 2003, 1141–1166.

[7] I. Kiuchi and Y. Tanigawa, *Bounds for double zeta-functions*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **5**, 2006, 445–464.

[8] I. Kiuchi and Y. Tanigawa, *Bounds for triple zeta-functions*, Indag. Mathem., **19**, 2008, 97–114.

[9] I. Kiuchi, Y. Tanigawa, and W. Zhai, *Analytic properties of double zeta-functions*, Indag. Mathem., **21**, 2011, 16–29.

[10] K. Matsumoto, *On analytic continuation of various multiple zeta-functions*, Number Theory for the Millenium (Urbana, 2000), Vol. 11, M. A. Bennett et. al. (eds.), A. K. Peters, Natick, MA, 2002, pp. 417–440.

[11] K. Matsumoto, *Functional equation for double zeta-functions*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **136** (2004), 1–7.

[12] K. Matsumoto and M. Shōji, *Numerical computations on the zeros of the Euler double zeta-function I*, Mosc. J. Comb. Number Theory **4** (2014), 21–39.

[13] K. Matsumoto and H. Tsumura, *Functional relations for various multiple zeta-functions*, Analytic Number Theory (Kyoto, 2005), RIMS Kôkyûroku no.1512 (2006), 179–190.

[14] K. Matsumoto and H. Tsumura, *Mean value theorems for the double zeta-function*, J. Math. Soc. Japan **67** (2015), 383–406.

[15] T. Nakamura, *Zeros and the universality for the Euler-Zagier-Hurwitz type of multiple zeta-functions*, Bull. Lond. Math. Soc. **41** (2009), no. 4, 691–700.

[16] T. Nakamura and Ł. Pańkowski, *On complex zeros off the critical line for non-monomial polynomial of zeta-functions*, Math. Z. **284** (2016), 23–39.

[17] T. Onozuka, *Analytic continuation of multiple zeta-functions and the asymptotic behavior at non-positive integers*, Funct. Approx. Comment. Math., **49** (2013), 331–348.

[18] Y. Sasaki, *Multiple zeta values for coordinatewise limits at non-positive integers*, Acta Arith. **136** (2009), 299–317.

[19] J. Zhao, *Analytic continuation of multiple zeta functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **128**, 2000, 1275–1283.