「多重ゼータ値」から「有限多重ゼータ値」へ

小野 雅隆（慶應義塾大学）

2018 年 9 月 11 日

はじめに

本稿は第 26 回整数論サマースクール「多重ゼータ値」における講演「『多重ゼータ値』から『有限多重ゼータ値』へ」のレジュメである．近年 Zagier によって導入された「有限多重ゼータ値」と呼ばれる対象が, 通常の多重ゼータ値の世界に負けず劣らず豊かな世界であることが Kaneko と Zagier によって予想されている．本稿では, この Kaneko-Zagier 予想を定式化する．

1　有限多重ゼータ値

$\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ をインデックスとする．素数 p に対し

$$\zeta_{<p}(\mathbf{k}) = \zeta_{<p}(k_1, \ldots, k_r) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_r<p} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}} \in \mathbb{Z}_{(p)}$$

とおく．空インデックス $\emptyset$ に対しては $\zeta_{<p}(\emptyset) := 1$ とおく．通常の多重ゼータ値の場合と違って有限和であり, 収束性を気にしなくて良い．したがって admissible とは限らない一般のインデックスを扱っていることに注意する．Hoffman [H] と Zhao [Z] は独立に $\zeta_{<p}(\mathbf{k}) \bmod p$ を考察し, 具体的な値の決定や, これらの間の関係式について先駆的な研究を行い, 現在では多くの数学者による数多くの研究が知られている．

Zagier は 2011 年ごろ, $\zeta_{<p}(\mathbf{k}) \bmod p$ を素数 p ごとに考えるのではなく全ての素数について同時に考える新たな枠組みを考案した．それを説明するために環 $\mathcal{A}$ を導入する．

定義 1.1.

$$\mathcal{A} := \prod_{p:\mathrm{prime}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \Bigg/ \bigoplus_{p:\mathrm{prime}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

とおく．

注意 1.2.　1. $\mathcal{A}$ の元を $(a_p)_p (a_p \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ と表す．$\mathcal{A}$ において, $(a_p)_p = (b_p)_p$ であることと有限個を除く全ての素数 p について $a_p = b_p$ であることが同値である．

2. $\bigoplus_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = (\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$ であるので, $\mathcal{A} = (\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ が成り立つ. これより $\mathcal{A}$ は $\mathbb{Q}$ 代数であることがわかる.

定義 1.3. インデックス $\mathbf{k}$ に対し, $\mathcal{A}$ の元 $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ を

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) := (\zeta_{<p}(\mathbf{k}) \bmod p)_p \in \mathcal{A}$$

と定義し, 有限多重ゼータ値と呼ぶ.

多重ゼータ値の場合と同様に, 非負整数 k に対し重さが k である有限多重ゼータ値全体が生成する $\mathcal{A}$ の $\mathbb{Q}$-部分空間を $\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}$ とおく.

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} := \langle \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k}\ \text{はインデックス}, \mathrm{wt}(\mathbf{k}) = k \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{A}$$

($\mathcal{Z}_{\mathcal{A},0} = \mathbb{Q}$ である.) また

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} := \sum_{k \geq 0} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} \subset \mathcal{A}$$

とおく. $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ は次の調和関係式によって $\mathcal{A}$ の部分 $\mathbb{Q}$ 代数になる.

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k} * \mathbf{l}) = \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{l}).$$

ただし $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ はインデックス. 次の予想は多重ゼータ値の場合の次元予想の $\mathcal{A}$-類似である.

予想 1.4 (Zagier)**.** 全ての非負整数 k に対し, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} = d_k - d_{k-2} = d_{k-3}$ が成り立つ. ただし $\{d_k\}_{k \geq -3}$ は

$$\begin{cases} d_{-3} := 1, d_{-2} := 0, d_{-1} := 0, \\ d_k = d_{k-2} + d_{k-3}\ (k \geq 0) \end{cases}$$

で定まる数列.

各 k について $\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}$ と $\mathcal{Z}_k$ の予想次元を表にまとめると以下の通り.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}$ の予想次元	1	0	0	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5
$\mathcal{Z}_k$ の予想次元	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12

この予想については次の結果が知られている. これは多重ゼータ値における Deligne–Goncharov[DG] や寺杣 [T] の結果の $\mathcal{A}$-類似に当たる.

定理 1.5 (Akagi–Hirose–Yasuda[AHY]+Jarossay[J1])**.** 全ての非負整数 k に対し, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} \leq d_{k-3}$ が成り立つ.

この定理により, 有限多重ゼータ値の間にも多くの $\mathbb{Q}$ 上の線型関係式が存在することがわかる. 証明については安田氏の講演を参照.

例 1.6. 有限多重ゼータ値の間の $\mathbb{Q}$ 上の線型関係式の例を述べる前に, 深さが小さい場合には有限多重ゼータ値が具体的に書ける場合があるので, それを紹介する. まず深さが 1 の場合は, 正整数 k に対して

$$\zeta_{\mathcal{A}}(k) = 0$$

がわかる ([H, THEOREM 4.3], [Z, Lemma 2.2]). これは $p-1 \nmid k$ の時 $\zeta_{<p}(k) \equiv 0 \bmod p$ であることからわかる. 次に深さが 2 の場合は, 正整数 k_1, k_2 に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(k_1, k_2) = (-1)^{k_2}\binom{k_1+k_2}{k_1} Z(k_1+k_2)$$

が知られている ([H, THEOREM 6.1], [Z, Theorem 1.7]). ただし, 正整数 k に対し

$$Z(k) := \left(\frac{B_{p-k}}{k} \bmod p\right)_p \in \mathcal{A}$$

であり, B_n は n 番目の Seki-Bernoulli 数である. この等式はいわゆるべき和の公式 (Faulharber の公式) を用いるとすぐに示すことができる.

注意 1.7.

1. 例で見たように Riemann ゼータ値の素朴な $\mathcal{A}$-類似 $\zeta_{\mathcal{A}}(k)$ は 0 になってしまったが, 以下の heuristic により $Z(k)$ が Riemann ゼータ値の "正しい" $\mathcal{A}$-類似だと信じられている (ただし, 最初の合同関係は k が負の場合にクンマー合同式から得られるものだが, k が正の場合には意味がない).

$$\zeta(k)\text{“}\underset{\bmod p}{\equiv}\text{”}\zeta(k-(p-1)) = -\frac{B_{p-k}}{p-k} \equiv Z(k)_p$$

2. k が偶数ならば, 奇素数 p に対し $B_{p-k}=0$ になるので, $Z(k)=0$ がわかる. 一方で 3 以上の奇数 k で $Z(k) \neq 0$ となる例は未だ知られていない. これは非常に難しい問題のようである. 例えば正則素数が無限個存在すれば, 3 以上の全ての奇数 k に対し $Z(k) \neq 0$ を示すことができる. 正則素数の無限性に比べるとかなり弱い主張であるが, それでもまだ難しい問題である. ちなみに正則素数の無限性もまた非常に難しい問題であることが知られている.

3. さらに言うと $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) \neq 0$ となる空でないインデックス $\mathbf{k}$ の例は未だ知られていない. つまり我々は「空でない任意のインデックス $\mathbf{k}$ に対して $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = 0$」という可能性を未だ排除できていないのである. これは喫緊の課題であると思う.

例 1.8. 有限多重ゼータ値の間に $\mathbb{Q}$ 上の多くの線型関係式が知られているが, 最も基本的なものは以下のシャッフル関係式である. すなわち, インデックス $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k} \sqcup\!\sqcup \mathbf{l}) = (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{l})}\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}, \bar{\mathbf{l}})$$

が成り立つ ([K, (2.3)], [KZ], [On, Corollary 4.1]). ただし $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_s)$ のとき $\bar{\mathbf{l}} = (l_s, \dots, l_1)$. 通常の多重ゼータ値の場合と異なり, シャッフル関係式は積を和に変換する代数関係式ではなく, 線型関係式であることに注意する. また $\mathbf{k} = \emptyset$ とおくと

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{l}) = (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{l})}\zeta_{\mathcal{A}}(\bar{\mathbf{l}})$$

が得られる (反転公式). 通常の多重ゼータ値の場合は $\zeta(\mathbf{k})$ と $\zeta(\overline{\mathbf{k}})$ の間には一般には線型関係は期待できないので, 反転公式は有限多重ゼータ値特有の線型関係式である.

シャッフル関係式の証明の概略. [On] の部分分数分解を用いるアイディアに沿って $\mathbf{k}=(1), \mathbf{l}=(1,2)$ の場合に証明をスケッチする. $\mathcal{A}$ の元

$$X := \left(\sum_{\substack{m_1,m_2,m_3>0 \\ m_1+m_2+m_3<p}} \frac{1}{m_1 m_2 (m_2+m_3)^2} \bmod p \right)_p$$

を考える. X を 2 通りに式変形する. まず部分分数分解

$$\frac{1}{ab^2} = \frac{1}{a(a+b)^2} + \frac{1}{b^2(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)^2} \tag{1}$$

を $a=m_1, b=m_2+m_3$ に用いて

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m_1 m_2 (m_2+m_3)^2} \\ &= \frac{1}{m_1 m_2 (m_1+m_2+m_3)^2} + \frac{1}{m_2 (m_2+m_3)^2 (m_1+m_2+m_3)} + \frac{1}{m_2 (m_2+m_3)(m_1+m_2+m_3)^2} \end{aligned}$$

を得る. これより第 2 項から $\zeta_{\mathcal{A}}(1,2,1)$ が, 第 3 項から $\zeta_{\mathcal{A}}(1,1,2)$ が出てくる. また部分分数分解

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)}$$

を第 1 項の (m_1, m_2) に用いることで, $X = 3\zeta_{\mathcal{A}}(1,1,2) + \zeta_{\mathcal{A}}(1,2,1)$ となる. $(1) ш (1,2) = 3(1,1,2) + (1,2,1)$ であるので, 結局 $X = \zeta_{\mathcal{A}}((1) ш (1,2))$ を得る.

一方 $n_1 = m_1, n_2 = p - m_2, n_3 = p - m_2 - m_3$ と変数変換すると

$$\begin{aligned} X &= \left(\sum_{0<n_1<n_3<n_2<p} \frac{1}{n_1 (p-n_2)(p-n_3)^2} \bmod p \right)_p \\ &= (-1)^3 \zeta_{\mathcal{A}}(1,2,1) = (-1)^{\mathrm{wt}((1,2))} \zeta_{\mathcal{A}}((1), \overline{(1,2)}) \end{aligned}$$

となり, $\mathbf{k}=(1), \mathbf{l}=(1,2)$ の場合のシャッフル関係式が示された. □

一般の $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r), \mathbf{l}=(l_1,\ldots,l_s)$ の場合は,

$$X(\mathbf{k},\mathbf{l}) := \left(\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_r,n_1,\ldots,n_s>0 \\ m_1+\cdots+m_r+n_1+\cdots+n_s<p}} \frac{1}{M_1^{k_1} M_2^{k_2} \cdots M_r^{k_r} N_1^{l_1} N_2^{l_2} \cdots N_s^{l_s}} \bmod p \right)_p$$

という $\mathcal{A}$ の元を考え (ただし $M_i := m_1 + \cdots + m_i, N_i := n_1 + \cdots + n_i$), 部分分数分解

$$\frac{1}{a^k b^l} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{l-1+i}{i} \frac{1}{a^{k-i}(a+b)^{l+i}} + \sum_{i=0}^{l-1} \binom{k-1+i}{i} \frac{1}{b^{l-i}(a+b)^{k+i}}$$

$(k, l \geq 1)$ を用いて $X(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k} ш \mathbf{l})$ を示すことができる (ここが非自明). 一方で $m'_i = m_i (1 \leq i \leq r)$, $n'_1 = p - n_1$, $n'_2 = p - n_1 - n_2, \ldots, n'_s = p - n_1 - \cdots - n_s$ という変数変換により,

$$X(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \left(\sum_{0<m'_1<\cdots<m'_r<n'_s<\cdots<n'_1<p} \frac{1}{m'^{k_1}_1 \cdots m'^{k_r}_r (p - n'_1)^{l_1} \cdots (p - n'_s)^{l_s}} \bmod p \right)_p$$
$$= (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{l})} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}, \bar{\mathbf{l}})$$

がわかり, 有限多重ゼータ値に対するシャッフル関係式が証明される.

次の予想は通常の多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$ 上の線型関係式が全て一般複シャッフル関係式から導かれるという予想の $\mathcal{A}$-類似である.

予想 1.9 (Kaneko–Zagier)**.** 有限多重ゼータ値の間の $\mathbb{Q}$ 線型関係式は, 以下の 2 つの線型関係式の有限個の組合せで得られるであろう.

$$\begin{cases} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k} * (l)) = 0 \ (\mathbf{k} \text{ はインデックス}, l \text{ は正の整数}) \\ \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k} ш \mathbf{l}) = (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{l})} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}, \bar{\mathbf{l}}) \ (\mathbf{k}, \mathbf{l} \text{ はインデックス}). \end{cases}$$

上の関係式は一方のインデックスの深さが 1 であるため, 左辺を調和関係式でバラすと 0 となり, 有限多重ゼータ値の線型関係式を与えていることに注意する.

他にも和公式 [SW], Hoffman 双対関係式 [H, THEOREM 4.6], 大野型関係式 [Oy, Theorem 1.4], 導分関係式 [M2, Theorem 2.1] などが知られている.

2 対称多重ゼータ値

この節では対称多重ゼータ値を定義し, 2 つの $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathcal{Z}$ と $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ の驚くべき関係を示唆する Kaneko-Zagier 予想を定式化する.

まず Kontsevich が Zagier に宛てた手紙の中のある示唆から始める. $k_1, k_2 \geq 1$ に対し, 彼は $\zeta_{<p}(k_1, k_2) \bmod p$ の和の動く範囲の上限 p について "mod$p$ で考えているのだから上限の p を 0 として扱ったものを考えるとどうなるか" と提案した. これを文字通りそのまま書くと

$$\sum_{0<n_1<n_2<0} \frac{1}{n_1^{k_1} n_2^{k_2}} \tag{2}$$

となる. $0 < n_1 < n_2 < 0$ の部分はこのままでは意味不明であるが, 次のように考えてみよう. つまり $-\infty$ から ∞ まで並んでいる通常の数直線を, 左彼方の 0 から出発し, ∞ と $-\infty$ を同一視して "$\infty = -\infty$"を飛び越えて負の数が小さい順に並んで 0 に至ると考える. この範囲で n_1 と n_2 が $n_1 < n_2$ を満たすようにわたる和を考えるのである.

すると (2) は

$$\left(\sum_{0<n_1<n_2}+\sum_{\substack{0<n_1\\ n_2<0}}+\sum_{n_2<n_1<0}\right)\frac{1}{n_1^{k_1}n_2^{k_2}}$$
$$=\zeta^*(k_1,k_2)+(-1)^{k_2}\zeta^*(k_1)\zeta^*(k_2)+(-1)^{k_1+k_2}\zeta^*(k_2,k_1)$$

を考えていることに対応している. k_1, k_2 が 1 である場合を考慮して調和正規化多重ゼータ値を考えていることに注意する. 以上の考察は一般の深さでも同様に行えるので, 次に定義する和が Kontsevich の示唆に現れる対象と思える.

定義 2.1. インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ に対し

$$\zeta_S^*(\mathbf{k})=\sum_{i=0}^{r}(-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r}\zeta^*(k_1,\ldots,k_i)\zeta^*(k_r,\ldots,k_{i+1})$$

とおく.

正規化多重ゼータ値は多重ゼータ値の線型結合であるので $\zeta_S^*(\mathbf{k})\in\mathcal{Z}$ であることに注意する.

Kontsevich の示唆に具現化した対象 $\zeta_S^*(\mathbf{k})$ は, 定義された時点では良い対象なのかどうかまだわからない. 次の定理は $\zeta_S^*(\mathbf{k})$ が “十分たくさん存在する” ことを示しており, その意味で $\zeta_S^*(\mathbf{k})$ は “良い” 対象だと思える.

定理 2.2 (Yasuda [Y, Theorem 6.1])**.** 非負整数 k に対し

$$\mathcal{Z}_k=\langle\zeta_S^*(\mathbf{k})\mid \mathbf{k}\text{ はインデックスで }\mathrm{wt}(\mathbf{k})=k\rangle_{\mathbb{Q}}$$

が成り立つ.

この定理を踏まえて, Kaneko–Zagier 予想とは以下の主張である.

予想 2.3 (Kaneko–Zagier)**.** 対応

$$\rho:\mathcal{Z}=\langle\zeta_S^*(\mathbf{k})\mid \mathbf{k}\text{ はインデックス }\rangle_{\mathbb{Q}}\longrightarrow\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}\,;\quad \zeta_S^*(\mathbf{k})\mapsto\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$$

は well-defined な $\mathbb{Q}$ 代数の準同型を与え, $\mathrm{Ker}(\rho)=\zeta(2)\mathcal{Z}$ が成り立つ.

注意 2.4. ρ は生成元を生成元に写すので, ρ は well-defined であれば全射である. よって $\mathbb{Q}$ 代数の同型 $\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}\xrightarrow{\cong}\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ が ρ から誘導される. この同型で $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ に写ると予想される $\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$ 側の対象が対称多重ゼータ値である.

定義 2.5. 対称多重ゼータ値 $\zeta_S(\mathbf{k})$ を

$$\zeta_S(\mathbf{k}):=\zeta_S^*(\mathbf{k})\bmod\zeta(2)\mathcal{Z}\in\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$$

と定義する.

Kaneko–Zagier 予想が正しいとすると, $\zeta_S(\mathbf{k})$ は $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ が満たす $\mathbb{Q}$ 上の代数/線型関係式と全く同じ代数/線型関係式を満たすことになる. つまり $\bmod p$ の世界の有限多重ゼータ値の関係式が通常の多重ゼータ値の言葉のみを用いて表現できるということである. これは非常に興味深い.

例 2.6. 値が具体的にわかる $\zeta_S(\mathbf{k})$ の例を見てみよう. まず深さが 1 の場合は有限多重ゼータ値と同じで 0 になる. 実際に正整数 k に対し $\zeta_S^*(k)$ を定義通り計算すると

$$\zeta_S^*(k) = (-1)^k\zeta^*(k) + \zeta^*(k) = \begin{cases} 2\zeta(k) & k \text{ が偶数} \\ 0 & k \text{ が奇数} \end{cases}$$

がわかる. k が偶数の場合は $\zeta(k)$ は $\zeta(2) = \pi^2/6$ の有理数倍であるので, 結局 $\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$ において $\zeta_S(k) = 0$ がわかる.

また深さが 2 の場合は

$$\zeta_S(k_1, k_2) \equiv (-1)^{k_2}\binom{k_1+k_2}{k_1}\zeta(k_1+k_2) \bmod \zeta(2)\mathcal{Z}$$

となることが知られている. これは $\zeta_{\mathcal{A}}(k_1, k_2) = (-1)^{k_2}\binom{k_1+k_2}{k_1}Z(k_1+k_2)$ に対応しており, この対応からも $Z(k)$ が Riemann ゼータ値 $\zeta(k)$ の $\mathcal{A}$ における正しい対応物とみなすことができる.

例 2.7. 対称多重ゼータ値についても調和関係式とシャッフル関係式が成り立つことが知られている.

$$\begin{cases} \zeta_S(\mathbf{k} * \mathbf{l}) = \zeta_S(\mathbf{k})\zeta_S(\mathbf{l}) \\ \zeta_S(\mathbf{k} ш \mathbf{l}) = (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{l})}\zeta_S(\mathbf{k}, \bar{\mathbf{l}}). \end{cases}$$

調和関係式は $\zeta^*(\mathbf{k})$ が調和関係式を満たすことから従う. 一方シャッフル関係式については, Kaneko–Zagier によって上の等式と同値な主張がある種の等式に帰着されることが示され, その等式は Yasuda によって示された.

調和関係式, シャッフル関係式以外にも, 和公式 [M1, Theorem 1.2], Hoffman 双対関係式 ([BTT, Theorem 1.4], [J2, Théorèm 1.7]), 大野型関係式 [Oy, Theorem 1.4], 導分関係式 [M2, Theorem 2.1] などが知られている. これらは全て有限多重ゼータ値の場合に成り立っている関係式の $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ を $\zeta_S(\mathbf{k})$ に置き換えた関係式になっており, Kaneko–Zagier 予想の状況証拠を与えるものになっている.

3 問題

この節では考えられる問題を列挙する.

1. 成立すると予想されている等式をいくつか紹介する. 正整数 k, r と有理数 $n_1, \dots, n_r$ に対し
$$W_k(n_1, \dots, n_r) := \sum_{\substack{k_1,\dots,k_r \geq 1 \\ k_1+\cdots+k_r=k}} n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r} \zeta_{\mathcal{A}}(k_1, \dots, k_r)$$
とおく. このとき次が成り立つであろう [HMS, Conjecture 9, 10, 11].
   (a) $W_k(1, 1, 2, 3, \dots, r-1, r) \stackrel{?}{=} 0$.
   (b) r が奇数なら $W_k(1, 1, 2, 3, \dots, r-1, r, r) \stackrel{?}{=} 0$.
   (c) $W_k(a, a+b, a+2b, \dots, a+rb) \stackrel{?}{=} W_k(b, a+b, a+2b, \dots, a+rb)$.

   ちなみに $W_k(1, \dots, 1, \underset{\widehat{i}}{2}, 1, \dots, 1) = 0$ $(1 \leq i \leq r)$ は知られている ([HMS, Theorem 2 (1.1)], [M3, Theorem 1.1]).

2. 多重ゼータ値の間で成り立っている関係式について, 有限類似や対称類似は存在するか. 例えば結合子関係式 (原田氏の講演) や積分級数等式 (川崎氏の講演) の有限・対称類似は存在するか.

3. 多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$ 上の線型関係式の族の間には包含関係が知られていることがある. 例えば双対関係式は大野関係式に含まれたり, 一般複シャッフル関係式は結合子関係式に含まれる, など. 有限多重ゼータ値や対称多重ゼータ値でも類似の包含関係は成り立つか. 特に双対関係式が一般複シャッフル関係式から導かれるか, という「双対関係式導出問題」は多重ゼータ値の長年の懸案事項であるが, 有限多重ゼータ値や対称多重ゼータ値の場合の類似の問題は成り立つか (この場合は Hoffman 双対関係式を考えることになる).

参考文献

[AHY] K. Akagi, M. Hirose and S. Yasuda, Integrality of p-adic multiple zeta values and a bound for the space of finite multiple zeta values, in preparation.

[BTT] H. Bachmann, Y. Takeyama, and K. Tasaka, Cyclotomic analogues of finite multiple zeta values, preprint available at arXiv 1707.05008.

[DG] P. Deligne and A. Goncharov, Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **38** (2005), 1–56.

[HMS] M. Hirose, H. Murahara and S. Saito, Weighted sum formula for multiple harmonic sums modulo primes, preprint, arXiv:1808.00844v1.

[H] M. E. Hoffman, Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums, Kyushu J. Math. **69** (2015) 345–366.

[J1] D. Jarossay, Indirect computation of p-adic cyclotomic multiple zeta values, preprint, arXiv:1501.04893v4.

[J2] D. Jarossay, Double mélange des multizêtas finis et multizêtas symétrisés, C. R. Acad. Sci. Paris, **352** (2014), 767–771.

[K] M. Kaneko, Finite multiple zeta values (有限多重ゼータ値), RIMS Kokyuroku Bessatsu **68** (2017) 175–180 (in Japanese).

[KY] M. Kaneko and S. Yamamoto, A new integral–series identity of multiple zeta values and regularizations, Selecta Mathematica **2018** (2018), 1–23.

[KZ] M. Kaneko and D. Zagier, Finite multiple zeta values, in preparation.

[M1] H. Murahara, A note on finite real multiple zeta values, Kyushu J. Math. **70** (2016), 197–204.

[M2] H. Murahara, Derivation relations for finite multiple zeta values, Int. J. Number Theory **13** (2017), 419–427.

[M3] H. Murahara, An algebraic proof of the weighted sum formula for finite and symmetric multiple zeta(-star) values, preprint, arXiv:1808.01430v2.

[On] M. Ono, Finite multiple zeta values associated with 2-colored rooted trees, Journal of Number Theory, Volume **181**, (2017), 99–116.

[Oy] K. Oyama, Ohno-type relation for finite multiple zeta values, to appear in Kyushu Journal of Math.

[SW] S. Saito and N. Wakabayashi, Sum formula for finite multiple zeta values, J. Math. Soc. Japan **67** (2015), 1069–1076.

[T] T. Terasoma, Mixed Tate motives and multiple zeta values, Invent. Math. **149** (2002), 339–369.

[Y] S. Yasuda, Finite real multiple zeta values generate the whole space Z, Int. J. Number Theory **12** (2016), 787–812.

[Z] J. Zhao, Wolstenholme type theorem for multiple harmonic sums Int. J. Number Theory, **4-1** (2008), 73–106.