

特異点解消法と繰込み法

小見山尚 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科 D2)

0 Introduction

以下に与えられる級数を多重ゼータ関数 (以下 MZF と書く) と呼ぶ:

$$\zeta(s_1, \dots, s_n) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_n} \frac{1}{m_1^{s_1} \dots m_n^{s_n}}$$

(ここで、 s_1, \dots, s_n は複素数を取る)。この級数は、

$$\{(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n \mid \Re(s_{n-k+1} + \dots + s_n) > k \ (1 \leq k \leq n)\}$$

において絶対収束することが知られており、2000年の初頭、Zhao([11]) と秋山, 江上, 谷川 ([1]) が独立に上記の関数が \mathbb{C}^n 上に有理型接続できることを示した。[1] では特に次のように MZF の具体的な極を与えている。

命題 0.1 ([1]). 関数 $\zeta(s_1, \dots, s_n)$ の極の集合は次で与えられる。

$$\left\{ (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n \left| \begin{array}{l} s_n = 1, \ s_{n-1} + s_n = 2, 1, 0, -2, -4, \dots, \\ s_{n-k+1} + \dots + s_n = k - r \ (3 \leq k \leq n, \ r \in \mathbb{N}_0) \end{array} \right. \right\}$$

この命題から $n \geq 2$ に対しては $\zeta(s_1, \dots, s_n)$ の極が無数に存在することが分かる ($n \geq 3$ では非正整数点はすべて特異点になる)。

非正整数点における“適切な”特殊値を定めるために、Guo, Zhang([6]) によって繰込み法が導入された。これは MZF の正の整数点における特殊値が満たす関係式を満たすように負の整数点での値を定める手法である。Guo, Zhang の後、彼等の方法に倣って Manchon, Paycha([10]) や Ebrahimi-Fard, Manchon, Zinger([3],[4]) などによる異なる繰込み法も導入されている。また、繰込み法とは独立に古庄, 小森, 松本, 津村 ([5]) による特異点解消法と呼ばれる手法も導入されている。この手法は上記のように無数に存在する MZF の極を一斉に解消するように与えられている。

このように幾つかの異なる手法が与えられているが、取り分け Ebrahimi-Fard, Manchon, Zinger([3]) による繰込み法で与えられる特殊値と、古庄, 小森, 松本, 津村 ([5]) による特異点解消法で与えられる特殊値の間には明示的な関係が与えられている ([7])。また、この関係から特異点解消法による値が繰込み法の満たす関係式を満たすことも分かる ([8])。以下では 2 つの導入法についての解説とその性質について述べる。

1 特異点解消法

特異点解消法は多重ゼータ関数の無数の極を一斉に消失させることを目的に導入された方法で、これにより \mathbb{C}^n 上正則関数が与えられる。以下で [5] の基本的な事項を確認しておこう。

まず $c \in \mathbb{R}$ に対して母関数 $\tilde{\mathfrak{H}}_n(t_1, \dots, t_n; c) \in \mathbb{C}[[t_1, \dots, t_n]]$ を次のように定める ([5] Definition 1.9)。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{H}}_n(t_1, \dots, t_n; c) &:= \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{\exp\left(\sum_{k=j}^n t_k\right) - 1} - \frac{c}{\exp\left(c \sum_{k=j}^n t_k\right) - 1} \right) \\ &= \prod_{j=1}^n \left(\sum_{m=1}^{\infty} (1 - c^m) B_m \frac{\left(\sum_{k=j}^n t_k\right)^{m-1}}{m!} \right) \end{aligned}$$

ここで、 B_m ($m \geq 0$) はベルヌーイ数で

$$\frac{x}{e^x - 1} := \sum_{m \geq 0} \frac{B_m}{m!} x^m$$

によって与えられるとする。

定義 1.1 ([5] Definition 3.1). $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ に対し、

$$\begin{aligned} &\zeta_{\text{FKMT}}(s_1, \dots, s_n) \\ &:= \lim_{\substack{c \rightarrow 1 \\ c \in \mathbb{R} \setminus \{1\}}} \frac{1}{(1-c)^n} \prod_{k=1}^n \frac{1}{(e^{2\pi i s_k} - 1) \Gamma(s_k)} \int_{\mathcal{C}^n} \tilde{\mathfrak{H}}_n(t_1, \dots, t_n; c) \prod_{k=1}^n t_k^{s_k-1} dt_k \end{aligned} \quad (1)$$

と定めこれを **desingularized MZF** と呼ぶ。ここで \mathcal{C} は実軸上を無限大から ε まで動き原点の周りを反時計回りに一周回って無限大へ帰るような経路とする。

注意 1.2. *desingularized MZF* の定義は一見すると *MZF* と関係ないように見えるが、式 (1) において c の極限を $c \rightarrow 1$ から $c \rightarrow 0$ に置き換えて形式的に計算すると *MZF* の積分表示が得られる。

この *desingularized MZF* は次のような性質を持つ。

命題 1.3 ([5] Theorem 3.4). desingularized MZF は整関数として \mathbb{C}^n 上に解析接続できる。

さて、desingularized MZF のもう一つの性質を述べるため次の母関数を導入する。不定元 u_j, v_j ($1 \leq j \leq n$) に対し $\mathcal{G}((u_j), (v_j)) \in \mathbb{Z}[u_j, v_j^{\pm 1}]$ を

$$\mathcal{G}((u_j), (v_j)) := \prod_{j=1}^n (1 - (u_j v_j + \cdots + u_n v_n)(v_j^{-1} - v_{j-1}^{-1}))$$

とする。ただし $v_0^{-1} := 0$ としておく。また整数の集合 $\{a_{\mathbf{l}, \mathbf{m}}\}$ を

$$\mathcal{G}((u_j), (v_j)) = \sum_{\substack{\mathbf{l}=(l_j) \in \mathbb{N}_0^n \\ \mathbf{m}=(m_j) \in \mathbb{Z}^n \\ \sum_{j=1}^n m_j=0}} a_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \prod_{j=1}^n u_j^{l_j} v_j^{m_j}$$

によって与える ($\mathcal{G}((u_j), (v_j))$ の各因子における v_j の指数の和は 0 になるので、和の条件に $\sum_{j=1}^n m_j = 0$ がある)。このとき、次が成り立つ。

命題 1.4 ([5] Theorem 3.8). 任意の $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{C}$ に対し、

$$\zeta_{\text{FKMT}}(s_1, \dots, s_n) = \sum_{\substack{\mathbf{l}=(l_j) \in \mathbb{N}_0^n \\ \mathbf{m}=(m_j) \in \mathbb{Z}^n \\ \sum_{j=1}^n m_j=0}} a_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \left(\prod_{j=1}^n (s_j)_{l_j} \right) \zeta(s_1 + m_1, \dots, s_n + m_n).$$

ただし $(s)_k$ は Pochhammer 記号で、 $(s)_0 := 1$ かつ $k \in \mathbb{N}$ と $s \in \mathbb{C}$ に対し、 $(s)_k := s(s+1)\cdots(s+k-1)$ で与えられるものとする。

例 1.5. 簡単な場合を具体的に書き下すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{FKMT}}(s) &= (1-s)\zeta(s), \\ \zeta_{\text{FKMT}}(s_1, s_2) &= (s_1-1)(s_2-1)\zeta(s_1, s_2) + s_2(s_2+1-s_1)\zeta(s_1-1, s_2+1) \\ &\quad - s_2(s_2+1)\zeta(s_1-2, s_2+2). \end{aligned}$$

定義 1.6 ([5]). desingularized MZF の $(s_1, \dots, s_n) = (-k_1, \dots, -k_n)$ での値 $\zeta_{\text{FKMT}}(-k_1, \dots, -k_n)$ を特異点解消値 (desingularized value) と呼ぶ。

この特異点解消値の母関数 $Z_{\text{FKMT}}(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}[[t_1, \dots, t_n]]$ を

$$Z_{\text{FKMT}}(t_1, \dots, t_n) := \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} \frac{(-t_1)^{k_1} \cdots (-t_n)^{k_n}}{k_1! \cdots k_n!} \zeta_{\text{FKMT}}(-k_1, \dots, -k_n) \quad (2)$$

と定めたとき、次が成り立つ。

命題 1.7 ([5] Theorem 3.7). 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、

$$Z_{\text{FKMT}}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n \frac{(1 - t_i - \dots - t_n) e^{t_i + \dots + t_n} - 1}{(e^{t_i + \dots + t_n} - 1)^2}$$

この母関数の形から次のような特異点解消値の間の漸化式を得る。

系 1.8 ([7]). 任意の $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ に対し、

$$Z_{\text{FKMT}}(t_1, \dots, t_n) = Z_{\text{FKMT}}(t_2, \dots, t_n) \cdot Z_{\text{FKMT}}(t_1 + \dots + t_n) \quad (3)$$

これを $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$ として $\zeta_{\text{FKMT}}(-k_1, \dots, -k_n)$ で書き換えると

$$\zeta_{\text{FKMT}}(-k_1, \dots, -k_n) = \sum_{\substack{i_2 + j_2 = k_2 \\ \vdots \\ i_n + j_n = k_n}} \prod_{a=2}^n \binom{k_a}{i_a} \zeta_{\text{FKMT}}(-i_2, \dots, -i_n) \zeta_{\text{FKMT}}(-k_1 - j_2 - \dots - j_n) \quad (4)$$

を得る。但しここで $\binom{k_a}{i_a} := \frac{k_a!}{i_a!(k_a - i_a)!}$ とした。

2 繰込み法

次に繰込み法について見て行こう。繰込み法 (**Renormalization**) とは、そもそも量子場理論において値が発散してしまう計算結果に対し発散項を適切に除去することでその発散を解消する操作の事である。Connes と Kreimer は [2] において、Hopf 代数の言葉を用いて renormalization が行えることを示した。そして Guo, Zhang はこの方法に基づいて MZF の特殊値を導入したため、彼らの手法にはこの名が冠せられている。以下では [3] の繰込み値の構成について述べていく。

文字 d, y の語で生成される \mathbb{Q} 上ベクトル空間 $\mathbb{Q}\langle d, y \rangle$ を考える ($\mathbb{Q}\langle d, y \rangle$ は empty word $\mathbf{1}$ を含むとする)。

定義 2.1. ベクトル空間 $\mathbb{Q}\langle d, y \rangle$ の部分ベクトル空間 $\mathcal{A} := \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}\langle d, y \rangle y$ に対し線形写像 $\sqcup_0 : \mathcal{A}^{\otimes 2} \rightarrow \mathcal{A}$ を次のように帰納的に定義する:

$$\mathbf{1} \sqcup_0 w := w \sqcup_0 \mathbf{1} := w, \quad (5)$$

$$yu \sqcup_0 v := u \sqcup_0 yv := y(u \sqcup_0 v), \quad (6)$$

$$du \sqcup_0 dv := d(u \sqcup_0 dv) - u \sqcup_0 d^2v, \quad (7)$$

ただし、 u, v, w は d, y の語とする。すると (\mathcal{A}, \sqcup_0) は非可換代数になる。

この非可換代数 (\mathcal{A}, \sqcup_0) の両側イデアル \mathcal{I} を

$$\{d^k\{d(u \sqcup_0 v) - du \sqcup_0 v - u \sqcup_0 dv\} \mid u, v \text{ は } d, y \text{ の語}, k \in \mathbb{N}_0\}$$

によって生成される両側イデアルとして、それによる \mathcal{A} の商を

$$\mathcal{H} := \mathcal{A}/\mathcal{I}$$

とするとこれは可換代数になる。

注意 2.2. $\delta = t \frac{d}{dt}$ 、 $x = \frac{t}{1-t}$ と置くと $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$ に対し、

$$\delta^{k_n} x \cdots \delta^{k_1} x = \text{Li}_{-k_1, \dots, -k_n}(t)$$

となることが分かる。ここで、 $\text{Li}_{k_1, \dots, k_n}(t)$ は多重ポリログで

$$\text{Li}_{k_1, \dots, k_n}(t) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_n} \frac{t^{m_n}}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}}$$

($k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$) と定義される関数であり、 $|t| < 1$ において絶対収束する。また、ライプニッツルールにより t の関数 f, g に対して

$$\delta(f)\delta(g) = \delta(f\delta(g)) - f\delta^2(g)$$

が成り立つ。これは定義 2.1 の式 (7) に相当している。つまり可換代数 \mathcal{H} は非正整数点のインデクスを持つ多重ポリログたちのなす代数と同型になる。

注意 2.3. \mathcal{A} には代数射 $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{\otimes 2}$ が

$$\Delta(d) := 1 \otimes d + d \otimes 1, \quad \Delta(y) := 1 \otimes y + y \otimes 1$$

として定まり、これは写像 $\tilde{\Delta} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^{\otimes 2}$ を誘導する。この写像 $\tilde{\Delta}$ により \mathcal{H} はホップ代数になる (すなわち $\tilde{\Delta}$ は \mathcal{H} の余積になる)。

上記の \mathcal{H} について、次の定理が成り立つ。

定理 2.4 ([2], [3], [9]: **algebraic Birkhoff decomposition**). 代数射 $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Q}[[z]][\frac{1}{z}]$ に対して、

$$\phi = \phi_-^{*(-1)} * \phi_+ \tag{8}$$

を満たす代数射 $\phi_- : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Q}[\frac{1}{z}]$ と $\phi_+ : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Q}[[z]]$ が一意に存在する。

注意 2.5. 代数射 $f, g: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Q}[[z]][\frac{1}{z}]$ に対し、代数射 $f * g: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Q}[[z]][\frac{1}{z}]$ を

$$f * g := m \circ (f \otimes g) \circ \tilde{\Delta}$$

と定める (これを **convolution product** と呼ぶ)。ここで m は $\mathbb{Q}[[z]][\frac{1}{z}]$ の積で、 $\tilde{\Delta}$ は \mathcal{H} の余積である。また、集合

$$G := \{f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Q}[[z]][\frac{1}{z}]; \text{代数射}\}$$

は $*$ により群になる。式 (8) の $\phi_-^{*(-1)}$ は G における ϕ_- の逆元を表す。

さて、 $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$ に対し \mathbb{Q} -線形写像 $\phi_0: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Q}[[z]][\frac{1}{z}]$ を次のように定めよう。

$$d^{k_1}y \cdots d^{k_n}y \mapsto \phi_0(d^{k_1}y \cdots d^{k_n}y)(z) := \partial_z^{k_1} (x(e^z) \partial_z^{k_2}) \cdots (x(e^z) \partial_z^{k_n}) (x(e^z)).$$

但し、 $\phi_0(1) := 1$ であり ∂_z は z による微分とする。

命題 2.6. 線形写像 ϕ_0 は代数射になる。

Proof. 写像 ϕ_0 は 2 つの写像

$$\begin{aligned} \psi: \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{Q}(t); d^{k_1}x \cdots d^{k_n}x \longmapsto \delta^{k_1}x \cdots \delta^{k_n}x \\ \xi: \text{Im}\psi &\longrightarrow \mathbb{Q}[[z]][\frac{1}{z}]; t \longmapsto e^z \end{aligned}$$

によって

$$\phi_0 = \xi \circ \psi$$

と表せる。ここで、 ψ の δ, y は注意 2.2 の $\delta = t \frac{d}{dt}, x = \frac{t}{1-t}$ である。注意 2.2 で述べた事から ψ は代数射であるので ϕ_0 も代数射になる。 \square

定理 2.4 と命題 2.6 により、写像 ϕ_0 から代数射 $\phi_{0,+}: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Q}[[z]]$ を得る。

定義 2.7 ([3] §4.2). $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$ に対し、

$$\zeta_{\text{EMS}}(-k_1, \dots, -k_n) := \lim_{z \rightarrow 0} \phi_{0,+}(d^{k_n}y \cdots d^{k_1}y)(z)$$

を繰込み値 (**renormalized value**) と呼ぶ。

写像 $\phi_{0,+}$ は代数射なので、 ζ_{EMS} には積和公式¹が成り立つ。積和公式のより一般の場合については、特異点解消値の場合と併せて次節 (命題 3.4) で述べることにして、ここでは簡単な例だけを挙げておく。

¹積和公式とは二つの ζ_{EMS} の積を ζ_{EMS} の線形和に書き換える等式を指す。

例 2.8. $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ に対し、

$$\zeta_{\text{EMS}}(-a)\zeta_{\text{EMS}}(-b) = \sum_{k=0}^b (-1)^k \binom{b}{k} \zeta_{\text{EMS}}(-a-k, -b+k),$$

$$\zeta_{\text{FKMT}}(-a, -b) \cdot \zeta_{\text{FKMT}}(-c) = \sum_{k=0}^c (-1)^k \binom{c}{k} \zeta_{\text{FKMT}}(-a, -b-k, -c+k).$$

また、この繰込み値については次のような性質がある。

命題 2.9 ([3] Theorem 4.3). 任意の $k_1 \in \mathbb{N}_0$ に対し、

$$\zeta_{\text{EMS}}(-k) = \zeta(-k)$$

が成り立つ。また、 $k_1 + k_2$ が奇数になる $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ に対し、

$$\zeta_{\text{EMS}}(-k_1, -k_2) = \zeta(-k_1, -k_2)$$

が成り立つ。

(これは、MZP の正則点での値と繰込み値が一致することを示している。)

3 特異点解消値と繰込み値の関係

前節までに説明した特異点解消値と繰込み値の間関係について述べよう。まず繰込み値の母関数 $Z_{\text{EMS}}(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}[[t_1, \dots, t_n]]$ を

$$Z_{\text{EMS}}(t_1, \dots, t_n) := \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} \frac{(-t_1)^{k_1} \dots (-t_n)^{k_n}}{k_1! \dots k_n!} \zeta_{\text{EMS}}(-k_1, \dots, -k_n)$$

とする。このとき、次が成り立つ。

定理 3.1 ([7]). 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$Z_{\text{EMS}}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1 - e^{-t_i - \dots - t_n}}{t_i + \dots + t_n} \cdot Z_{\text{FKMT}}(-t_1, \dots, -t_n)$$

が成り立つ。

この定理は、 ζ_{FKMT} と ζ_{EMS} が互いに有限線形和で表し合えることを表す。

例 3.2. $k \in \mathbb{N}_0$ に対し、

$$\zeta_{\text{EMS}}(-k) = \sum_{i+j=k} \binom{k}{i} \frac{(-1)^j}{i+1} \zeta_{\text{FKMT}}(-j),$$

$$\zeta_{\text{FKMT}}(-k) = (-1)^k \sum_{i+j=k} \binom{k}{i} B_i \cdot \zeta_{\text{EMS}}(-j).$$

命題 1.7 と定理 3.1 から次の系を得る。

系 3.3 ([7]). 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$Z_{\text{EMS}}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n \frac{(t_i + \dots + t_n) - (e^{t_i + \dots + t_n} - 1)}{(t_i + \dots + t_n)(e^{t_i + \dots + t_n} - 1)}.$$

が成り立つ。

この母関数の明示式から Z_{EMS} も式 (3) を満たすことが分かる、すなわち

$$Z_{\text{FKMT}}(t_1, \dots, t_n) = Z_{\text{FKMT}}(t_2, \dots, t_n) \cdot Z_{\text{FKMT}}(t_1 + \dots + t_n). \quad (9)$$

この式と式 (3) から次を得る。

命題 3.4 ([8]). ζ_{FKMT} は ζ_{EMS} と同じ積和公式を満たす、すなわち、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \zeta_{\text{FKMT}}(-k_1, \dots, -k_p) \zeta_{\text{FKMT}}(-l_1, \dots, -l_q) \\ &= \sum_{\substack{i_1 + j_1 = l_1 \\ \vdots \\ i_q + j_q = l_q}} \prod_{a=1}^q (-1)^{i_a} \binom{l_a}{i_a} \zeta_{\text{FKMT}}(-k_1, \dots, -k_{p-1}, -k_p - i_1 - \dots - i_q, -j_1, \dots, -j_q). \end{aligned}$$

Proof. $\bullet = \text{FKMT}$ (or EMS) とする。このとき、式 (3) (or 式 (9)) を繰り返し用いることで、次を得る。

$$\begin{aligned} & Z_{\bullet}(s_1, \dots, s_p) Z_{\bullet}(t_1, \dots, t_q) \\ &= Z_{\bullet}(s_1, \dots, s_{p-1}, s_p - t_1 - \dots - t_q, t_1, \dots, t_q) \end{aligned}$$

両辺の係数を比較することで命題の主張を得る。 \square

命題 3.4 は非正整数点のインデックス同士の積についてだが、片一方を複素数にまで拡張した形のものも成り立つ。

命題 3.5 ([8]). $s_1, \dots, s_p \in \mathbb{C}$ と $l \in \mathbb{N}_0$ に対し、

$$\zeta_{\text{FKMT}}(s_1, \dots, s_p) \zeta_{\text{FKMT}}(-l) = \sum_{i+j=l} (-1)^i \binom{l}{i} \zeta_{\text{FKMT}}(s_1, \dots, s_{p-1}, s_p - i, -j).$$

参考文献

- [1] S.Akiyama, S.Egami, Y.Tanigawa, *Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers*, Acta. Arith. 2001, no. 2, 107–116.
- [2] A.Connes, D.Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. I. The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem*, 2000, Comm. Math. Phys. 210(1):249–273.
- [3] K.Ebrahimi-Fard, D.Manchon, J.Singer, *The Hopf algebra of (q) multiple polylogarithms with non-positive arguments*, Int. Math. Res. Notices, 2016, Vol. **17**, 41 pages.
- [4] K.Ebrahimi-Fard, D.Manchon, J.Singer, *Renormalization of q -regularised multiple zeta values*, 2016, Lett. Math. Phys. **106**, no. 3, 365–380.
- [5] H.Furusho, Y.Komori, K.Matsumoto, H.Tsumura, *Desingularization of complex multiple zeta-functions*, 2015, arXiv:1508.06920, to appear in Amer. J. Math.
- [6] L.Guo, B.Zhang, *Renormalization of multiple zeta values*, 2008, J. Algebra **319**, no. 9, 3770–3809.
- [7] N.Komiyama, *Equivalence between desingularized and renormalized values of multiple zeta functions at negative arguments*, to appear in IMRN.
- [8] N.Komiyama, *Shuffle-type product formulae of desingularized values of multiple zeta-functions*, arXiv:1804.05568
- [9] D.Manchon, *Hopf algebras in renormalization*, 2008, Handbook of algebra, Vol.5, 365–427.
- [10] D.Manchon, S.Paycha, *Nested sums of symbols and renormalized multiple zeta values*, 2010, Int. Math. Res. Not. IMRN, no. 24, 4628–4697.

- [11] J.Zhao, *Analytic continuation of multiple zeta functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 2000, no. 5, 1275–1283.