Yamamoto 積分表示と積分級数等式

川崎菜穂 (Naho Kawasaki)
東北大学大学院理学研究科

Yamamoto([9]) は, 2-labeled poset を用いて反復積分を定義し, 多重ゼータ（スター）値を含む広範な対象の積分表示を与えている. 多重ゼータ値の類似物である, Arakawa-Kaneko ゼータ関数や Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数, 一部のルート系のゼータ関数それぞれの特殊値を表すことができ, 応用としてそれらの特殊値に対する関係式が再証明される. 本講義では, Yamamoto 積分表示を導入したのち, Arakawa-Kaneko ゼータ関数への応用について述べる. また, Kaneko-Yamamoto によって導入された積分級数等式を紹介し, これに付随する予想を紹介する.

正の整数 $k_1, \ldots, k_r$ に対して, index $\mathbf{k}$ を $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ で定義する. $k_r > 1$ のとき, index $\mathbf{k}$ を admissible (以下, adm.) と呼ぶ. 多重ゼータ値 $\zeta(k_1, \ldots, k_r)$ および多重ゼータスター値 $\zeta^\star(k_1, \ldots, k_r)$ は, 任意の adm. index $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対して,

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k_1, \ldots, k_r) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}}$$

および

$$\zeta^\star(\mathbf{k}) = \zeta^\star(k_1, \ldots, k_r) := \sum_{0<m_1\leq\cdots\leq m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}}$$

でそれぞれ定義されるものである.

1 Yamamoto 積分表示

Yamamoto 積分表示 ([9]) について述べる.

定義 1.1 ([9, Definition 2.1])**.** (1) $X = ((X, \preceq), \delta_X)$ を有限半順序集合 (finite partially ordered set) $(X, \preceq)$ と *labeling map* $\delta_X : X \to \{0, 1\}$ の組とし, *2-poset* と呼ぶ.

(2) 2-poset X が *admissible* (以下, adm.) であるとは, X のすべての極大元 x に対して $\delta_X(x) = 0$ かつ, X のすべての極小元 x に対して $\delta_X(x) = 1$ となることとする.

(3) adm. 2-poset X に付随する積分を

$$I(X) = \int_{\Delta(X)} \prod_{x \in X} \omega_{\delta_X(x)}(t_x)$$

で定義する. ただし,

$$\Delta(X) = \left\{ (t_x)_x \in (0,1)^X \mid t_x < t_y \text{ if } x \prec y \right\}$$

かつ,

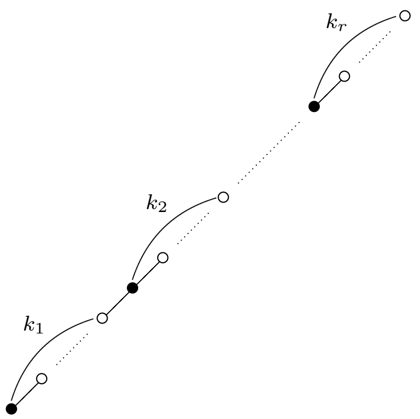
$$\omega_0(t) = \frac{dt}{t}, \quad \omega_1(t) = \frac{dt}{1-t}$$

とする.

2-poset X が adm. ならば $I(X)$ は収束する. empty 2-poset を $\varnothing$ で表し, $I(\varnothing) = 1$ とおく. これは empty index $\varnothing$ (記号流用) に対する定義 $\zeta(\varnothing) = \zeta^\star(\varnothing) = 1$ に対応している.

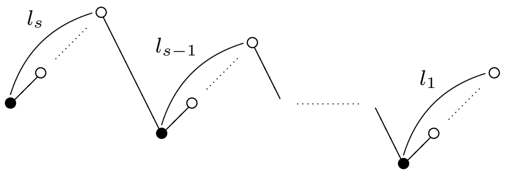
2-poset を表すために, 頂点 $\circ$, $\bullet$ がそれぞれ $\delta_X(x) = 0, 1$ に対応している Hasse 図を用いる. このとき, 辺で結ばれた頂点の上下関係で半順序関係を表す. 一般に, 2-poset に対応する Hasse 図は唯一通りではない. 定義 1.1 より, 多重ゼータ値 $\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ の Yamamoto 積分表示は,

$$\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_r) = I\left(\quad \right)$$



となる. これは, 多重ゼータ値の反復積分表示である. このことから, adm. 2-poset X が全順序である場合, $I(X)$ が多重ゼータ値の反復積分表示に一致することがわかる. また, 多重ゼータスター値 $\zeta^\star(l_1, \ldots, l_{s-1}, l_s)$ の Yamamoto 積分表示は,

$$\zeta^\star(l_1, \ldots, l_{s-1}, l_s) = I\left(\quad \right)$$



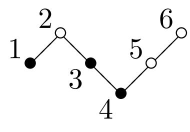
となる. これは, [9, Corollary 1.3] で与えられた多重ゼータスター値の積分表示である.

例 1.2 (多重ゼータスター値の Yamamoto 積分表示における計算)**.** 2-poset X を

$$X = \begin{cases} \{1 \prec 2 \succ 3 \succ 4 \prec 5 \prec 6\} \\ (\delta_X(1), \ldots, \delta_X(6)) = (1, 0, 1, 1, 0, 0) \end{cases}$$

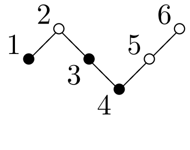
とおく. このとき, X は adm. である. Hasse 図を用いると,

$$I(X) = I\left(\quad \right)$$



と表される. これは多重ゼータスター値 $\zeta^\star(3, 1, 2)$ の Yamamoto 積分表示である. 実際,

$$I\left(\quad \right) = \int_0^1 \frac{dt_6}{t_6} \int_0^{t_6} \frac{dt_5}{t_5} \int_0^{t_5} \frac{dt_4}{1-t_4} \int_{t_4}^1 \frac{dt_3}{1-t_3} \int_{t_3}^1 \frac{dt_2}{t_2} \int_0^{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1}$$



を計算すると,

$$\int_0^{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1} = \sum_{0<n} \frac{t_2^n}{n},$$

$$\sum_{0<n} \frac{1}{n} \int_{t_3}^{1} t_2^{n-1} dt_2 = \sum_{0<n} \frac{1-t_3^n}{n^2},$$

$$\sum_{0<n} \frac{1}{n^2} \int_{t_4}^{1} \frac{1-t_3^n}{1-t_3} dt_3 = \sum_{0<m\le n} \frac{1-t_4^m}{mn^2},$$

$$\sum_{0<m\le n} \frac{1}{mn^2} \int_0^{t_5} \frac{1-t_4^m}{1-t_4} dt_4 = \sum_{0<l\le m\le n} \frac{t_5^l}{lmn^2},$$

$$\sum_{0<l\le m\le n} \frac{1}{lmn^2} \int_0^{t_6} t_5^{l-1} dt_5 = \sum_{0<l\le m\le n} \frac{t_6^l}{l^2mn^2},$$

$$\sum_{0<l\le m\le n} \frac{1}{l^2mn^2} \int_0^{1} t_6^{l-1} dt_6 = \sum_{0<l\le m\le n} \frac{1}{l^3mn^2} \ = \ \zeta^{\star}(3,1,2)$$

を得る.

多重ゼータ値や多重ゼータスター値の他に, Mordell-Tornheim 型ゼータ関数の特殊値 ([9]), Arakawa-Kaneko ゼータ関数の特殊値 ([4, 5, 9]) や Kaneko-Tsumura ゼータ関数の特殊値 ([4]) などを Yamamoto 積分表示で表すことができる.

2 積分級数等式

まず, 2-poset の基本的な構造と Yamamoto 積分表示の間に成り立つ関係式について紹介する.

命題 2.1 ([9, Definition 2.2, Proposition 2.3])**.** (1) 2-poset X の比較不可能な元 a, b に対して, X に関係 $a \prec b$ を追加した 2-poset を X_a^b と書く. このとき, 2-poset X が adm. ならば X_a^b, X_b^a は adm. であり,

$$I(X) = I(X_a^b) + I(X_b^a)$$

が成り立つ.

(2) 2-poset $X = ((X, \preceq), \delta_X)$ に対して, 2-poset $X^\dagger = ((X, \preceq^\dagger), \delta_{X^\dagger})$ を次のように定義する. X の元 x, y に対して, $x \preceq y$ ならば $y \preceq^\dagger x$ とする. そして, $\delta_{X^\dagger} = 1 - \delta_X$ とおく. このとき, 2-poset X が adm. ならば $X^\dagger$ は adm. であり,

$$I(X) = I(X^\dagger)$$

が成り立つ.

(3) 2-poset X, Y に対して, 2-poset $X \amalg Y = ((X \amalg Y, \preceq'), \delta_{X \amalg Y})$ を次のように定義する.

$$x \preceq' y \iff x, y \in X \text{ and } x \preceq y \text{ in } X \text{ または}$$
$$x, y \in Y \text{ and } x \preceq y \text{ in } Y$$

とし, $\delta_{X \amalg Y} : X \amalg Y \to \{0,1\}$ を $\delta_X : X \to \{0,1\}$ と $\delta_Y : Y \to \{0,1\}$ の直和とする. このとき, 2-poset X, Y が adm. ならば $X \amalg Y$ は adm. であり,

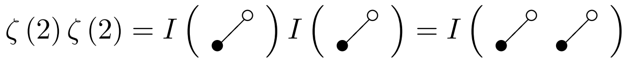
$$I(X)\, I(Y) = I(X \amalg Y)$$

が成り立つ.

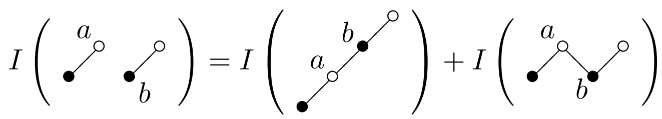
命題 2.1 (1) により, 2-poset X が adm. ならば $I(X)$ は多重ゼータ値の和で書き表せる.

命題 2.1 (1), (3) から, adm. 2-poset X, Y が特に全順序の場合, 次のように多重ゼータ値の shuffle 関係式が得られる. 多重ゼータ値の shuffle 関係式とは, 多重ゼータ値の反復積分表示に由来する積を用いて得られる関係式である.

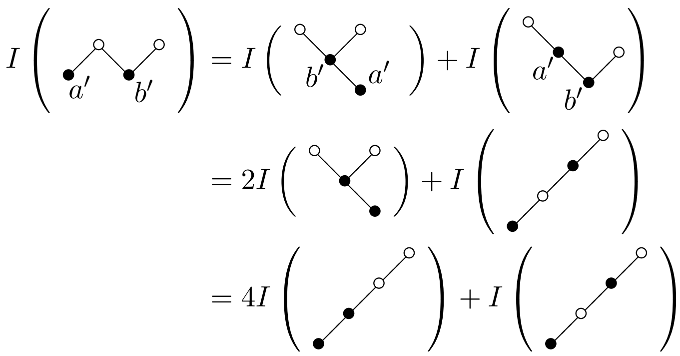
例 2.2. 多重ゼータ値の積 $\zeta(2)\zeta(2)$ を Yamamoto 積分表示を用いて計算する. これは命題 2.1 (3) より,



となる. そして命題 2.1 (1) より,



となる. 同様に, 右辺の第二項に命題 2.1 (1) を繰り返し用いることにより,



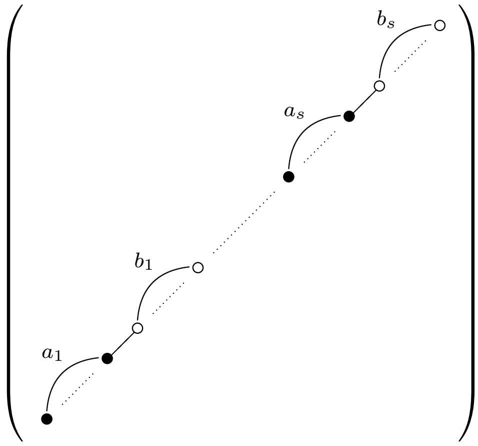
を得る. したがって, shuffle 関係式

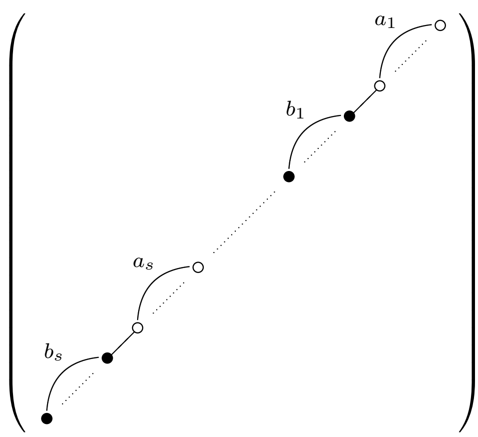
$$\zeta(2)\,\zeta(2) = 4\zeta(1,3) + 2\zeta(2,2)$$

が得られる.

命題 2.1 (2) は, 次の多重ゼータ値の双対公式の自然な一般化となっている. adm. index $\mathbf{k}$ を, 2 以上の成分と 1 とにわけて, $\mathbf{k} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{a_1 - 1}, b_1 + 1, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{a_s - 1}, b_s + 1)$ $(a_1, b_1, \dots, a_s, b_s \geq 1)$ と表す. このとき, $\mathbf{k}$ の dual index $\mathbf{k}^\dagger$ を $\mathbf{k}^\dagger = (\underbrace{1, \dots, 1}_{b_s - 1}, a_s + 1, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{b_1 - 1}, a_1 + 1)$ で定義する. adm. index $\mathbf{k}$ とその dual index $\mathbf{k}^\dagger$ に対して, 双対公式 $\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(\mathbf{k}^\dagger)$ が成り立つ. この事実は, Yamamoto 積分表示を用いると次のように解釈できる.

例 2.3. $\mathbf{k} = (\underbrace{1,\ldots,1}_{a_1-1}, b_1+1, \ldots, \underbrace{1,\ldots,1}_{a_s-1}, b_s+1) \quad (a_1, b_1, \ldots, a_s, b_s \geq 1)$ に対して, $\zeta(\mathbf{k})$ を Yamamoto 積分表示で表し, 命題 2.1 (2) を用いると,

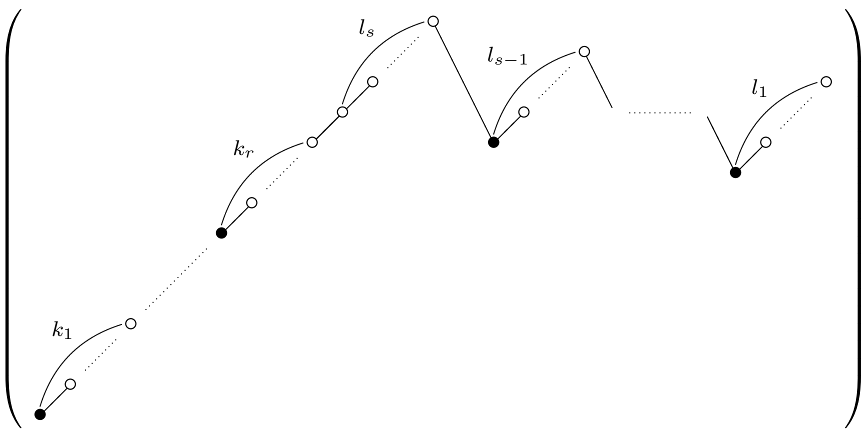
I 

$= I$ 

となり, $\mathbf{k}$ の dual index $\mathbf{k}^\dagger$ に対する $\zeta(\mathbf{k}^\dagger)$ が得られる.

次に, 積分級数等式について述べる.

定理 2.4 (積分級数等式, [3, Theorem 4.1])**.** 任意の non-empty index $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$, $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_s)$ に対して,

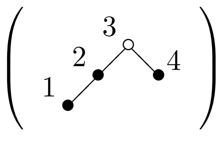
I 

$$= \sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r \\ \| \\ 0<n_1\leq\cdots\leq n_s}} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r} n_1^{l_1}\cdots n_s^{l_s}}$$

が成り立つ.

積分級数等式において, $s=1$ とすると多重ゼータ値, $r=1$ とすると多重ゼータスター値, それぞれの Yamamoto 積分表示に一致する. このことから積分級数等式は, 多重ゼータ値と多重ゼータスター値の積分表示の一般化となっていることがわかる.

積分級数等式は, 左辺の積分を左から右に計算することにより, 右辺の級数が得られる. ここでは, 例として $\mathbf{k} = \mathbf{l} = (1,1)$ の場合の証明を述べる. 左辺は,

L.H.S. $= I$ 

$$= \int_0^1 \frac{dt_4}{1-t_4} \int_{t_4}^1 \frac{dt_3}{t_3} \int_0^{t_3} \frac{dt_2}{1-t_2} \int_0^{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1}$$

である. t_1 から順に積分を計算すると,

$$\int_0^{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1} = \sum_{0<m_1} \frac{t_2^{m_1}}{m_1},$$

$$\sum_{0<m_1} \frac{1}{m_1} \int_0^{t_3} \frac{t_2^{m_1}}{1-t_2} dt_2 = \sum_{0<m_1<m_2} \frac{t_3^{m_2}}{m_1 m_2},$$

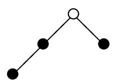
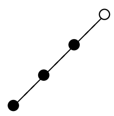
$$\sum_{0<m_1<m_2} \frac{1}{m_1 m_2} \int_{t_4}^{1} t_3^{m_2-1} dt_3 = \sum_{\substack{0<m_1<m_2 \\ \parallel \\ n_2}} \frac{1-t_4^{n_2}}{m_1 m_2 n_2},$$

$$\sum_{\substack{0<m_1<m_2 \\ \parallel \\ n_2}} \frac{1}{m_1 m_2 n_2} \int_0^1 \frac{1-t_4^{n_2}}{1-t_4} dt_4 = \sum_{\substack{0<m_1<m_2 \\ \parallel \\ 0<n_1 \le n_2}} \frac{1}{m_1 m_2 n_1 n_2} \ = \ \text{R.H.S.}$$

を得る.

積分級数等式の両辺を, 次の例のようにそれぞれ展開することによって, 多重ゼータ値の関係式が得られる.

例 2.5. $\mathbf{k} = \mathbf{l} = (1,1)$ の場合を計算する. 左辺は命題 2.1 (1) より,

$I\Bigg($  $\Bigg) = 3I\Bigg($  $\Bigg) = 3\zeta(1,1,2)$

となる. 一方, 右辺は,

$$\sum_{\substack{0<m_1<m_2 \\ \parallel \\ 0<n_1 \le n_2}} \frac{1}{m_1 m_2 n_1 n_2} = 2\zeta(1,1,2) + \zeta(2,2) + \zeta(1,3)$$

となる. したがって,

$$\zeta(1,1,2) = \zeta(2,2) + \zeta(1,3)$$

を得る.

積分級数等式は簡明な式であるが, そこから得られる多重ゼータ値の関係式族は大きなクラスになり, 次のような予想が知られている.

予想 2.6 ([3, Conjecture 4.3])**.** 積分級数等式から得られる関係式族によって, 多重ゼータ値の全ての線形関係式が導出されるであろう.

このことに関連して, 次のような事実が知られている.

定理 2.7 ([3, Theorem 4.6, Theorem 4.8, Theorem 6.7])**.** (1) 複シャッフル関係式のもとで, 積分級数等式と正規化基本定理は同値である.

(2) 積分級数等式のもとで, harmonic 関係式と shuffle 関係式は同値である.

(3) 積分級数等式, 複シャッフル関係式および双対公式により, 川島関係式が導出される.

3 Arakawa-Kaneko ゼータ関数への応用

Kaneko と Tsumura はゼータ関数

$$\eta\left(\mathbf{k};s\right)=\eta\left(k_1,\cdots,k_r;s\right):=\frac{1}{\Gamma\left(s\right)}\int_0^\infty\frac{\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}\left(1-e^t\right)}{1-e^t}t^{s-1}dt\qquad\left(\mathrm{Re}\left(s\right)>1-r\right)$$

を定義した ([2]). これは, Arakawa-Kaneko ゼータ関数

$$\xi\left(\mathbf{k};s\right)=\xi\left(k_1,\cdots,k_r;s\right):=\frac{1}{\Gamma\left(s\right)}\int_0^\infty\frac{\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}\left(1-e^{-t}\right)}{e^t-1}t^{s-1}dt\qquad\left(\mathrm{Re}\left(s\right)>0\right)$$

([1]) の '双子の兄弟' と呼ばれている. ただし, $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ を index, s を複素変数とする. そして, $\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}\left(z\right)$ を multiple polylogarithm

$$\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}\left(z\right):=\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{z^{n_r}}{{n_1}^{k_1}\cdots{n_r}^{k_r}}\qquad(|z|<1)$$

とする. Kaneko-Tsumura ゼータ関数 $\eta\left(\mathbf{k};s\right)$ および Arakawa-Kaneko ゼータ関数 $\xi\left(\mathbf{k};s\right)$ は, 複素全平面に整関数として解析接続される.

Kaneko と Tsumura は, これらのゼータ関数の特殊値が多重ゼータ値または多重ゼータスター値の線形和であることを示した. この定理を紹介するために記号を定めておく. 任意の非負整数列 $\mathbf{j}=(j_1,\ldots,j_r)\quad(j_1,\ldots,j_r\geq 0)$ に対して, $\mathbf{j}$ の weight および depth をそれぞれ, $\mathrm{wt}\left(\mathbf{j}\right)=j_1+\cdots+j_r$, $\mathrm{dep}\left(\mathbf{j}\right)=r$ で定義する. 任意の index $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ に対して, $\mathbf{k}_+:=(k_1,\ldots,k_{r-1},k_r+1)$ とおく. depth が等しい $\mathbf{k}$, $\mathbf{j}=(j_1,\ldots,j_r)$ に対して, $\mathbf{k}+\mathbf{j}$ を index

$$\mathbf{k}+\mathbf{j}:=\left(k_1+j_1,\ldots,k_r+j_r\right),$$

そして, $b\left(\mathbf{k};\mathbf{j}\right)$ を

$$b\left(\mathbf{k};\mathbf{j}\right):=\prod_{i=1}^{r}\begin{pmatrix}k_i+j_i-1\\ j_i\end{pmatrix}.$$

とおく.

Kaneko と Tsumura は [2] の中で, 次の定理を示した.

定理 3.1 ([2, Theorem 2.5])**.** 任意の non-empty index $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ と任意の正の整数 m に対して,

$$\eta\left(\mathbf{k};m\right)=(-1)^{r-1}\sum_{\substack{\mathrm{wt}(\mathbf{j})=m-1\\ \mathrm{dep}(\mathbf{j})=n}}b\left((\mathbf{k}_+)^\dagger;\mathbf{j}\right)\zeta^\star\left((\mathbf{k}_+)^\dagger+\mathbf{j}\right)$$

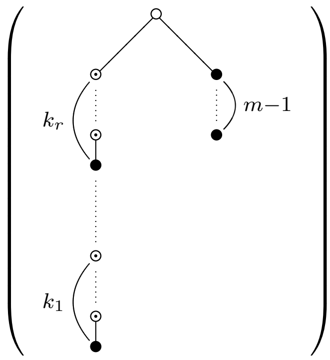
および

$$\xi\left(\mathbf{k};m\right)=\sum_{\substack{\mathrm{wt}(\mathbf{j})=m-1\\ \mathrm{dep}(\mathbf{j})=n}}b\left((\mathbf{k}_+)^\dagger;\mathbf{j}\right)\zeta\left((\mathbf{k}_+)^\dagger+\mathbf{j}\right)$$

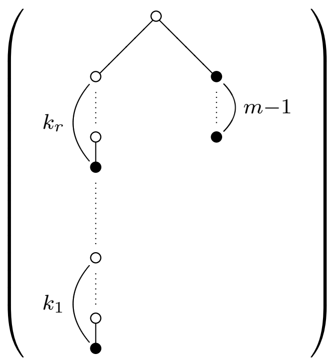
が成り立つ. ただし, 和は weight が $m-1$ であり, depth が $n=\mathrm{dep}((\mathbf{k}_+)^\dagger)$ である非負整数列 $\mathbf{j}$ すべてをわたる.

この定理は Yamamoto 積分表示を用いると, 次のように再証明できる ([4]).

正の整数 m に対して, Kaneko-Tsumura ゼータ関数の特殊値 $\eta(k_1,\ldots,k_r;m)$ の Yamamoto 積分表示は,

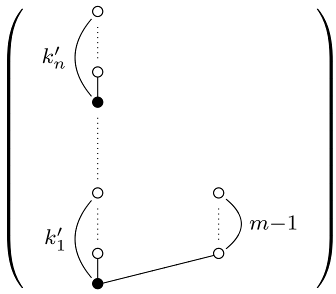
$$\eta(k_1,\ldots,k_r;m) = (-1)^{r-1}\, I$$


となる (cf. [8]). ただし, $\omega_0(t)+\omega_1(t) = \frac{dt}{t(1-t)}$ を表す頂点として $\odot$ を用いた. また, Arakawa-Kaneko ゼータ関数の特殊値 $\xi(k_1,\ldots,k_r;m)$ の Yamamoto 積分表示は,

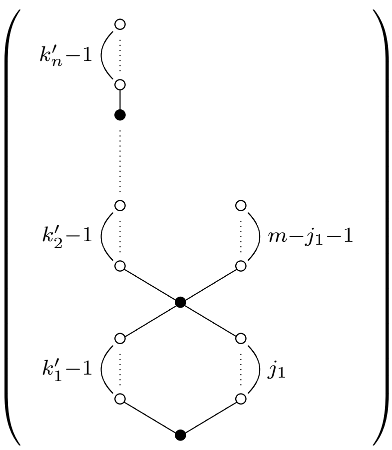
$$\xi(k_1,\ldots,k_r;m) = I$$


となる (cf. [2]).

Combinatorial proof. $\xi(\mathbf{k};m)$ の Yamamoto 積分表示と命題 2.1 (2) より,

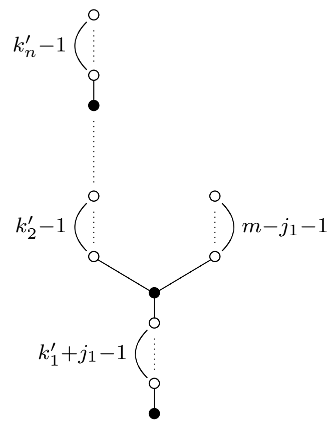
$$\xi(\mathbf{k};m) = I$$


が得られる. ただし, $(\mathbf{k}_+)^\dagger = (k'_1,\ldots,k'_n)$ とする. 以下, 全順序化を行う. 命題 2.1 (1) より,

$$\xi(\mathbf{k};m) = \sum_{j_1=0}^{m-1} I$$


となる. 極小元とその次の黒丸の間にある $k'_1 + j_1 - 1$ 個 $(1 \le j_1 \le m-1)$ の白丸を全順序化する方法は $\binom{k'_1+j_1-1}{j_1}$ 通りであることから,

$$\xi(\mathbf{k}; m) = \sum_{j_1=0}^{m-1} \binom{k'_1 + j_1 - 1}{j_1} I \left(\quad \right)$$



となる. 同様の操作を $n-1$ 回繰り返すことによって, 示したい式が得られる. $\eta(\mathbf{k}; m)$ についても同様に示すことができる. □

また, [2] を踏まえて書かれた [8] の中で, Yamamoto は次の定理を証明した.

定理 3.2 ([8, Corollary 2.5])**.** 任意の正の整数 k,m に対して,

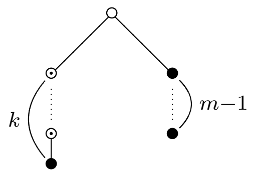
$$\eta(k; m) = \eta(m; k)$$

が成り立つ.

この定理も Yamamoto 積分表示を用いて, 次のように再証明できる ([4]).

Combinatorial proof. 左辺を計算すると,

$$\eta(k; m) = I \left(\quad \right) = \sum_{\substack{0<u_1 \le \cdots \le u_k \\ \| \\ 0<v_1 \le \cdots \le v_m}} \frac{1}{u_1 \cdots u_k v_1 \cdots v_m}$$



となる. 右辺の級数の対称性より明らか. □

注意 3.3. [2] と [8] では, $\eta(\mathbf{k}; m)$ および $\xi(\mathbf{k}; m)$ の定義式から, 解析的あるいは母関数の計算によって定理 3.1, 定理 3.2 を導いている. また, 定理 3.2 は [2] で予想され, [8] で $\mathrm{dep}(\mathbf{k}) = \mathrm{dep}(\mathbf{m}) \ge 1$ に一般化され証明されている.

4　その他の研究とこれからの課題

Yamamoto 積分表示が用いられているその他の研究について, 二つ紹介する:

Shingu([5]) は, depth が 1 の index $\mathbf{k} = (k)$ に対する Kaneko-Tsumura ゼータ関数 $\eta(k; m)$ の特殊値を多重ゼータ値の和で表せることを, Yamamoto 積分表示を用いて証明した ([5, 定理 6.1]). この結果を特殊化することにより, Kaneko-Tsumura による予想式 ([2, §3]) が成

り立つことも示した ([5, 系 6.2]). また, 定理 3.2 を大野関係式から再証明している ([5, 定理 7.1]).

Umezawa([6]) は, ‘Mordell-Tornheim 型の Arakawa-Kaneko ゼータ関数’ の特殊値が ‘一般 Mordell-Tornheim 型のゼータ関数’ の特殊値の和で書き表せることを示した ([6, Theorem 5]). この証明は二通りあり, そのうちの一つでそれぞれのゼータ関数の特殊値に対する Yamamoto 積分表示が用いられている ([6, Remark 5]). また, ‘Mordell-Tornheim 型の多重ゼータ関数’ を定義し, その特殊値が Yamamoto 積分表示で表せることにも言及している ([6, Remark 10]).

最後に, Yamamoto 積分表示に関連する今後の課題をいくつか挙げておく:

- 2 つの多重ゼータスター値の Yamamoto 積分表示の積が多重ゼータスター値の Yamamoto 積分表示の和でうまく表せるか.
- 積分級数等式から harmonic 関係式および shuffle 関係式が導出できるか. この問題は定理 2.7 (1), (2) より, 積分級数等式から正規化複シャッフル関係式が導出できるかという問題と同値である.
- 積分級数等式から双対公式が導出できるか. この問題を肯定的に解決することにより, 正規化複シャッフル関係式から双対公式が導出できるかという双対公式導出問題を肯定的に解決できる. 導出することができれば定理 2.7 (2), (3) より, 正規化複シャッフル関係式から川島関係式を導出できることがわかる.
- Kaneko-Tsumura([2, §5]) の ‘多変数版の Kaneko-Tsumura ゼータ関数’ を Yamamoto 積分表示できるか. そして, 定理 3.2 の多変数版である [8, Corollary 2.5] の再証明ができるか.
- Yamamoto 積分表示を用いて, 多重ゼータスター値と t-多重ゼータ値の間に成り立つ 2-1 公式を再解釈できるか. t-多重ゼータ値とは, 多重ゼータ値と多重ゼータスター値を補間したものである. Yamamoto([7]) は Yamamoto 積分表示を用いて, 2-1 公式の両辺の値に対する結果と疑問について述べている. その疑問を解決することで, 2-1 公式が成り立つ背景をより深く理解できるか.
- 多重ゼータ (スター) 値における先行研究を, §3 で紹介した Kawasaki-Ohno([4]) のように, Yamamoto 積分表示を用いて再解釈できるか.

参考文献

[1] T. Arakawa and M. Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, *Nagoya Math. J.*, **153** (1999), 189-209.

[2] M. Kaneko and H. Tsumura, Multi-poly-Bernoulli numbers and related zeta functions, to appear in *Nagoya Math. J.*, arXiv:1503.02156.

[3] M. Kaneko and S. Yamamoto, A new integral-series identity of multiple zeta values and regularizations, *Selecta Mathematica*, **24** (2018), 2499-2521, arXiv:1605.03117.

[4] N. Kawasaki and Y. Ohno, Combinatorial proofs of identities for special values of Arakawa-Kaneko multiple zeta functions, *Kyushu J. Math.*, **72** (2018), 215-222.

[5] 神宮啓佑, Kaneko-Tsumura ゼータ関数とその周辺, 修士論文, 名古屋大学 (2018).

[6] R. Umezawa, On an analog of the Arakawa-Kaneko zeta function and relations of some multiple zeta values, preprint, 2018, arXiv:1803.11441.

[7] 山本修司, 等号付き多重ゼータ値と 2-1 公式, 第 59 回代数学シンポジウム 報告集 (2014), 8pp.

[8] S. Yamamoto, Multiple zeta functions of Kaneko-Tsumura type and their values at positive integers, preprint, 2016, arXiv:1607.01978.

[9] S. Yamamoto, Multiple zeta-star values and multiple integrals, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B68** (2017), 3-14, arXiv:1405.6499.