多重ゼータ値導入

──定義から正規化まで──

金子昌信

1　定義

多重ゼータ値（Multiple Zeta Value, MZV と略す）とは，与えられた自然数の組 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対して次の無限級数で定まる実数のことである．

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k_1, \ldots, k_r) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}}. \tag{1.1}$$

$\mathbf{k}$ のことをインデックス (index) とかインデックス集合 (index set) とか言う． 一番最後の k_r が 1 だと発散してしまうので，$k_r \geq 2$ と仮定する．この発散，収束は簡単に分かるのであるが，k_i をより一般に複素数とした場合の絶対収束域について小野塚さんが述べられるはずで，そのごく特殊な場合と言うことで，ここでは省略する．多重ゼータ「値」と言えばもっぱら k_i が自然数の場合を指す． また念のため言っておくと，和の m_i は大小順序のついた自然数をわたる．(1.1) の右辺の和を $\zeta(k_r, \ldots, k_1)$ と，k_i を逆に並べて書く流儀もあるので文献にあたる際は注意が必要である．

多重ゼータ値は Goldbach とか Euler が $r = 2$ の場合を考えたのが始まりで，近年（と言ってももう四半世紀を超えますね）いろいろな分野との関わりから活発に研究されるようになった．この辺の歴史は報告集で多少詳しく書くとして，早速本論に入るとする．

定義 1.1. インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{N}^r$ にたいし，量 $|\mathbf{k}| := k_1 + \cdots + k_r$ および $\mathrm{dep}(\mathbf{k}) := r$ をそれぞれ重さ（weight），深さ（depth）という．$k_r > 1$ であるようなインデックスを許容的（admissible）もしくは収束インデックスという．収束しないようなインデックスまで考えてどうするのかと思われるかも知れないが，それが本講演の重要なテーマ「正規化」につながる．重さとか深さはインデックスに対してははっきり定まる量であるが，ときに $\zeta(k_1, \ldots, k_r)$ の重さが $k_1 + \cdots + k_r$ であるとか，深さが r であるとか言うこともある.（実際，あとで何度も出て来る $\zeta(1,2) = \zeta(3)$ という等式があるので，この数の深さは何ですかということになるし，重さについても，異なる重さの多重ゼータ値は独立だと考えられているが証明はされていないので,「値」の重さが well-defined かも現状では分からない.）

重さ 5 までの多重ゼータ値を書き出してみると

	wt=2	wt=3	wt=4	wt=5
dep=1	$\zeta(2)$	$\zeta(3)$	$\zeta(4)$	$\zeta(5)$
dep=2		$\zeta(1,2)$	$\zeta(1,3), \zeta(2,2)$	$\zeta(1,4), \zeta(2,3), \zeta(3,2)$
dep=3			$\zeta(1,1,2)$	$\zeta(1,1,3), \zeta(1,2,2), \zeta(2,1,2)$
dep=4				$\zeta(1,1,1,2)$

この表を見てすぐに見当がつくだろうか．重さが k で深さが r の多重ゼータ値（インデックス）の個数は二項係数 $\binom{k-2}{r-1}$ に等しい．そして重さ k の総数は 2^{k-2} である．難しくはないので，考えてみられたい．

2　多重ゼータ値の代数

多重ゼータ値で張られる $\mathbb{Q}$ ベクトル空間というものが一つの考察の対象である．

定義 2.1. 重さが k の多重ゼータ値で張られる $\mathbb{R}$ の部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathcal{Z}_k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ と書く．重さ 0 のインデックスとして空インデックスを考え，$\zeta(\emptyset)=1$ としておくと何かと都合がよい．この約束の下，

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_0 &= \mathbb{Q}, \quad \mathcal{Z}_1=\{0\},\\ \mathcal{Z}_k &= \sum_{\substack{1\le r\le k-1\\ k_1,\ldots,k_{r-1}\ge 1, k_r\ge 2\\ k_1+\cdots+k_r=k}} \mathbb{Q}\cdot\zeta(k_1,\ldots,k_r) \quad (k\ge 2).\end{aligned}$$

さらに

$$\mathcal{Z}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{Z}_k$$

と定義する．

重さが 2 の元は $\zeta(2)$ しかないから，$\mathcal{Z}_2=\mathbb{Q}\cdot\zeta(2)$ (一次元) である．重さ 3 には $\zeta(3)$ と $\zeta(1,2)$ の二つがあるが，Euler による有名な関係 $\zeta(1,2)=\zeta(3)$ があるので，$\mathcal{Z}_3=\mathbb{Q}\cdot\zeta(1,2)+\mathbb{Q}\cdot\zeta(3)=\mathbb{Q}\cdot\zeta(3)$ (一次元) である．あとで $\mathcal{Z}_4$ もまた $\zeta(4)$ で張られる一次元空間であることを示す．現状では，5 以上の k で $\mathcal{Z}_k$ の次元が真に 1 より大きいことが示せているもの一つもない．これは例えば $\zeta(5)$ と $\zeta(2,3)$ が $\mathbb{Q}$ 上独立であるというようなことを示す必要があるが，その手の結果が全くないことによる．そのような現状ではあるが，$\mathcal{Z}_k$ の次元については Zagier による，今では非常によく知られたはっきりとした予想がある．数列 d_k $(k=0,1,2,\ldots)$ を次の漸化式で定める．

$$d_0=1,\ d_1=0,\ d_2=1,\ \ d_k=d_{k-2}+d_{k-3}\ \ (k\ge 3). \tag{2.1}$$

Fibonacci 数列に似ているが，二つ前と三つ前の和をとっている．予想は次の通り．

予想 2.2 (Zagier [11]). $\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}_k=d_k$ であろう．

この予想については決定的の結果が Goncharov や寺杣さんによって知られている．

定理 2.3 (Goncharov [2], Terasoma [9], Deligne-Goncharov [1]). 不等式 $\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}_k\le d_k$ が成り立つ．

上に述べたように，逆向きの不等式について分かっていることは $\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}_k\ge 1$ という自明なものに過ぎない．

ここで数列 d_k と，各重さの収束インデックス総数 $(=2^{k-2})$ を表にしてみる．

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
d_k	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28
2^{k-2}	–	–	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192

これを見ると，d_k の大きさが 2^{k-2} に比してずっと小さいことが分かる.（実際の大きさも漸化式から分かる.）ということは，次元を d_k 以下に落とすだけの沢山の関係式があるということになる．実際に様々な背景を持つ関係式族が（非常に！）多く知られており，それらの間の包含関係や，どれを使えば全部の関係式が出てきそうか，という予想もいくつかある． そのあたりについてはこのサマースクールの中で追々出てくるであろう.

本講演では，ほぼ定義から自然に出てくると言ってよい「複シャッフル関係式」というものと，それを「正規化」という作業によって，非収束インデックスにまで拡張して得られる関係式について紹介する.

まず，ベクトル空間 $\mathcal{Z}$ が $\mathbb{Q}$ 代数の構造を持つことを示す.

命題 2.4. $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\mathcal{Z}$ は通常の実数の積で閉じており $\mathbb{Q}$ 代数となる．またその積は重さについて $\mathcal{Z}_k \cdot \mathcal{Z}_l \subset \mathcal{Z}_{k+l}$ を満たす.

Proof. この命題は少なくとも二通りの証明がある．一つは定義級数 (1.1) を用いるもので，その積（を和として書き表す仕方）は調和積とか stuffle 積（訳語は見たことがない）と呼ばれる．もう一つは，後で説明する積分表示を用いる．ここでは前者による証明を行う.

自然数 N を固定し，和を N までで打ち切った有限和 $\zeta_N(k_1,\dots,k_r)$ を考える：

$$\zeta_N(k_1,\dots,k_r)=\sum_{0<m_1<\cdots<m_r<N}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}.$$

有限和であるから k_i は何でもよいが，ここでは引き続き自然数のみを考える．ただし $k_r=1$ の場合も許す． この場合も区別なく考慮できることが後々大事になる．$k_r>1$ であるとき，この有限和は $N\to\infty$ とすると多重ゼータ値 $\zeta(k_1,\dots,k_r)$ に収束する.

二つのインデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ と $\mathbf{l}=(l_1,\dots,l_s)$ に対し，深さの和 $r+s$ に関する帰納法で

積 $\zeta_N(\mathbf{k})\zeta_N(\mathbf{l})$ は，適当なインデックス $\mathbf{m}$ たちによる $\zeta_N(\mathbf{m})$ の一次結合である

ことを証明する．証明から分かるように，$\mathbf{k}$ と $\mathbf{l}$ が収束インデックスならば $\mathbf{m}$ たちも収束インデックスに取れるので，$N\to\infty$ の極限をとれば，命題の主張の前半がいえて，やはり証明を見れば重さについての言明も証明されていることになることが分かる.

まず $r+s=2$ のとき，つまり $r=s=1$ のときは，

$$\begin{aligned}\zeta_N(k)\zeta_N(l)&=\sum_{0<m<N}\frac{1}{m^k}\sum_{0<n<N}\frac{1}{n^l}=\sum_{0<m,n<N}\frac{1}{m^kn^l}\\&=\left(\sum_{0<m<n<N}+\sum_{0<n<m<N}+\sum_{0<m=n<N}\right)\frac{1}{m^kn^l}\\&=\zeta_N(k,l)+\zeta_N(l,k)+\zeta_N(k+l)\end{aligned}$$

と計算されて，確かに正しい．右辺の重さが皆 $k+l$ になっていることに注意しよう．次に $r+s>2$ と仮定し，深さの和が $r+s$ より小さい場合は主張が正しいとする．このとき，同じ考え方，つま

り最後の m_r と n_s の大小関係で和を三つに分けて，

$$
\begin{aligned}
\zeta_N(\mathbf{k})\zeta_N(\mathbf{l}) &= \sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r<N \\ 0<n_1<\cdots<n_s<N}} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r} n_1^{l_1}\cdots n_s^{l_s}} \\
&= \Bigg(\sum_{\substack{0<n_s<m_r<N \\ 0<m_1<\cdots<m_r \\ 0<n_1<\cdots<n_s}} + \sum_{\substack{0<m_r<n_s<N \\ 0<m_1<\cdots<m_r \\ 0<n_1<\cdots<n_s}} + \sum_{\substack{0<m_r=n_s<N \\ 0<m_1<\cdots<m_r \\ 0<n_1<\cdots<n_s}} \Bigg) \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r} n_1^{l_1}\cdots n_s^{l_s}} \\
&= \sum_{0<m_r<N} \zeta_{m_r}(\mathbf{k}_-)\zeta_{m_r}(\mathbf{l}) \frac{1}{m_r^{k_r}} + \sum_{0<n_s<N} \zeta_{n_s}(\mathbf{k})\zeta_{n_s}(\mathbf{l}_-) \frac{1}{n_s^{l_s}} + \sum_{0<m_r<N} \zeta_{m_r}(\mathbf{k}_-)\zeta_{m_r}(\mathbf{l}_-) \frac{1}{m_r^{k_r+l_s}}
\end{aligned}
$$

と計算する．ここに $\mathbf{k}_- = (k_1,\dots,k_{r-1}), \mathbf{l}_- = (l_1,\dots,l_{s-1})$ で，$\zeta_\bullet(\emptyset) = 1$ と約束している（$\bullet$ は何か自然数）．帰納法の仮定から積 $\zeta_{m_r}(\mathbf{k}_-)\zeta_{m_r}(\mathbf{l})$ は $\zeta_{m_r}(\mathbf{m})$ たちの和であり，

$$
\sum_{0<m_r<N} \zeta_{m_r}(\mathbf{m}) \frac{1}{m_r^{k_r}} = \zeta_N(\mathbf{m}, k_r)
$$

である．他の二項も同様．これで証明が出来た． □

この積を純代数的に考えるため，次のような枠組みを用意する．$\mathcal{R} := \bigoplus_{r\geq 0} \mathbb{Q}[\mathbb{N}^r]$ をインデックス（自然数の組）の $\mathbb{Q}$ 係数形式和のなすベクトル空間とする．すなわちインデックス $\mathbf{k} = (k_1,\dots,k_r) \in \mathbb{N}^r$ ごとに記号 $[\mathbf{k}] = [k_1,\dots,k_r]$ を用意し，その有理数係数の有限和全体を考える．$\mathbb{Q}[\mathbb{N}^0] = \mathbb{Q}[\emptyset]$ とする．そして $\mathcal{R}^0$ で収束インデックス（すなわち $k_r \geq 2$ であるようなもの）が張る部分空間を表す．$\emptyset$ も収束インデックスの仲間に入れる．この $\mathcal{R}$ 上に，次の帰納的ルールで積 $*$ を入れる（調和積，stuffle product）．

- 積は $\mathbb{Q}$ 双線形，
- 任意の $\mathbf{k}$ に対し $[\emptyset] * [\mathbf{k}] = [\mathbf{k}] * [\emptyset] = [\mathbf{k}]$,
- $[\mathbf{k}] * [\mathbf{l}] = \big[[\mathbf{k}_-] * [\mathbf{l}], k_r\big] + \big[[\mathbf{k}] * [\mathbf{l}_-], l_s\big] + \big[[\mathbf{k}_-] * [\mathbf{l}_-], k_r + l_s\big]$，ここに $\mathbf{k} = (k_1,\dots,k_r)$, $\mathbf{l} = (l_1,\dots,l_s)$ に対し $\mathbf{k}_- = (k_1,\dots,k_{r-1})$ および $\mathbf{l}_- = (l_1,\dots,l_{s-1})$.

これは上の証明中の $\zeta_N(\mathbf{k})$ の積の構造を公理化したもので，Hoffman [4] はこの積が結合的かつ可換（これは自明）であることを証明した．$\mathcal{R}$ を積 $*$ による $\mathbb{Q}$ 代数と見ていることを明示するときは $\mathcal{R}_*$ と書く．このとき $\mathcal{R}^0$ は部分 $\mathbb{Q}$ 代数となり，それを $\mathcal{R}^0_*$ と書く．

対応 $[\mathbf{k}] \mapsto \zeta(\mathbf{k})$ を $\mathbb{Q}$ 線形に拡張することで，$\mathbb{Q}$ 線形写像 $\zeta : \mathcal{R}^0 \to \mathbb{R}$ が得られる（同じ文字 ζ を使う）．命題 2.4 で示したことは，これが $\mathcal{R}^0_*$ から $\mathbb{R}$ への準同型であること，つまり

$$
\zeta([\mathbf{k}] * [\mathbf{l}]) = \zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l}) \tag{2.2}
$$

が全ての収束インデックス $\mathbf{k}$，$\mathbf{l}$ について成り立つことに他ならない．簡単のため右辺の $\zeta([\mathbf{k}] * [\mathbf{l}])$ をしばしば $\zeta(\mathbf{k} * \mathbf{l})$ と書く．

3　積分表示

まず log のテイラー展開

$$
-\log(1-x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}
$$

から出発する．これは $|x|<1$ で収束しているが，$x\to 1$ とすると発散する．見かけは "$\zeta(1)$" である．左辺は

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t}$$

と書けることに注意しておく．これを x で割ってからもう一度 0 から x まで積分すると，

$$\int_0^x (-\log(1-t))\,\frac{dt}{t}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m^2}$$

となり，今度は $x\to 1$ としても収束し，$\zeta(2)$ を与える．左辺の積分は

$$\int_0^x\left(\int_0^{t_2}\frac{dt_1}{1-t_1}\right)\frac{dt_2}{t_2}=\iint_{0<t_1<t_2<x}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}$$

と書ける．同様のこと（「反復積分」）を繰り返すと，

$$\underset{0<t_1<\cdots<t_k<x}{\int\cdots\int}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\cdots\frac{dt_k}{t_k}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m^k}$$

となり，$x\to 1$ として $\zeta(k)$ が得られることは容易に理解できるであろう．ここで，これを $1-x$ で割って積分してみる．まず $|x|<1$ の範囲で，

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m^k}\cdot\frac{1}{1-x}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m^k}\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{x^{m+n-1}}{m^k}.$$

最後 n を $n-1$ に変えた．これを 0 から x まで項別積分すると，

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{x^{m+n}}{m^k(m+n)}=\sum_{0<m<n}\frac{x^n}{m^k n}$$

となる．（$m+n$ を n と置き直した．）これは $x\to 1$ のとき収束しないが，これをまた一度 x で割って積分した

$$\sum_{0<m<n}\frac{x^n}{m^k n^2}$$

は収束し，$\zeta(k,2)$ を与える．この先同様に x で割って積分，x で割って積分，を繰り返すことにより n の冪が増えていき，結局次の積分表示に到達する．

$$\underset{0<t_1<\cdots<t_{k_1+k_2}<x}{\int\cdots\int}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\cdots\frac{dt_k}{t_{k_1}}\cdot\frac{dt_{k_1+1}}{1-t_{k_1+1}}\frac{dt_{k_1+2}}{t_{k_1+2}}\cdots\frac{dt_{k_1+k_2}}{t_{k_1+k_2}}=\sum_{0<m_1<m_2}\frac{x^{m_2}}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}}$$

そして，$k_2>1$ であれば（admissible）$x=1$ と出来て，

$$\zeta(k_1,k_2)=\underset{0<t_1<\cdots<t_{k_1+k_2}<1}{\int\cdots\int}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\cdots\frac{dt_k}{t_{k_1}}\cdot\frac{dt_{k_1+1}}{1-t_{k_1+1}}\frac{dt_{k_1+2}}{t_{k_1+2}}\cdots\frac{dt_{k_1+k_2}}{t_{k_1+k_2}}$$

という，二重ゼータ値の積分による表示が得られる．これで一般の場合もお分かりと思うが，$1-t$ で割ることにより深さが一つ増え，そのあとの dt/t の繰り返しが最後のインデックスを 1 ずつ増

やしていく．一般の場合はさぼってここには書かないことにするが，このあとの川崎さんの講演で出て来る山本さんの積分は，この多重ゼータ値の積分表示を一般化し，かつ簡明な表記を与える．証明は原則，上でやったような，多重積分を順々に積分していく逐次積分である．

この積分表示が，多重ゼータ値の空間に新たな積構造を与える．これを一番簡単な例 $\zeta(2)^2$ で見よう．$\zeta(2)$ の積分表示は

$$\zeta(2)=\int_{0<t_1<t_2<1}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}$$

である．この二つの積は次のように計算される．

$$\begin{aligned}
\zeta(2)^2 &= \int_{0<t_1<t_2<1}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\int_{0<s_1<s_2<1}\frac{ds_1}{1-s_1}\frac{ds_2}{s_2}\\
&= \int_{\substack{0<t_1<t_2<1\\0<s_1<s_2<1}}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{ds_1}{1-s_1}\frac{ds_2}{s_2}\\
&= \Bigg(\int_{0<t_1<t_2<s_1<s_2<1}+\int_{0<t_1<s_1<t_2<s_2<1}+\int_{0<t_1<s_1<s_2<t_2<1}+\int_{0<s_1<t_1<t_2<s_2<1}\\
&\qquad +\int_{0<s_1<t_1<s_2<t_2<1}+\int_{0<s_1<s_2<t_1<t_2<1}\Bigg)\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{ds_1}{1-s_1}\frac{ds_2}{s_2}\\
&= \int_{0<t_1<t_2<s_1<s_2<1}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{ds_1}{1-s_1}\frac{ds_2}{s_2}+\int_{0<t_1<s_1<t_2<s_2<1}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{ds_1}{1-s_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{ds_2}{s_2}\\
&+\int_{0<t_1<s_1<s_2<t_2<1}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{ds_1}{1-s_1}\frac{ds_2}{s_2}\frac{dt_2}{t_2}+\int_{0<s_1<t_1<t_2<s_2<1}\frac{ds_1}{1-s_1}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{ds_2}{s_2}\\
&+\int_{0<s_1<t_1<s_2<t_2<1}\frac{ds_1}{1-s_1}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{ds_2}{s_2}\frac{dt_2}{t_2}+\int_{0<s_1<s_2<t_1<t_2<1}\frac{ds_1}{1-s_1}\frac{ds_2}{s_2}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\\
&= \zeta(2,2)+\zeta(1,3)+\zeta(1,3)+\zeta(1,3)+\zeta(1,3)+\zeta(2,2)\\
&= 2\zeta(2,2)+4\zeta(1,3).
\end{aligned}$$

これは，要領は級数の積のときと同じで，4 次元空間の中の積分領域

$$\{(t_1,t_2,s_1,s_2)\in[0,1]^4\mid 0<t_1<t_2<1, 0<s_1<s_2<1\}$$

を，t_i, s_j の大小関係に従って六つに分割するのである．そうするとそれぞれの積分が多重ゼータ値を与える．$t_1=s_1$ のような場合は領域の次元が落ちて，測度が 0 となり積分値には寄与しないことに注意．この分割は結局，四つの微分形式 $\frac{dt_1}{1-t_1}$, $\frac{dt_2}{t_2}$, $\frac{ds_1}{1-s_1}$, $\frac{ds_2}{s_2}$ があるなかで，$\frac{dt_1}{1-t_1}$, $\frac{dt_2}{t_2}$ には $\frac{dt_1}{1-t_1}$ が左で $\frac{dt_2}{t_2}$ が右という順序があり，$\frac{ds_1}{1-s_1}$, $\frac{ds_2}{s_2}$ には $\frac{ds_1}{1-s_1}$ が左で $\frac{ds_2}{s_2}$ が右という順序があって，それぞれの順序は保ちつつ，四つを並べる方法，それはつまり $\binom{4}{2}=6$ 通りあるが，それぞれごとの積分の和になると言っているのと同じである．この並べ方をトランプカードのシャッフルになぞらえて，$\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}$ と $\frac{ds_1}{1-s_1}\frac{ds_2}{s_2}$ のシャッフルといい，こうして得られる多重ゼータ値の積をシャッフル積 (shuffle product) という．（収束インデックスに対する）多重ゼータ値の積分表示に現れる微分形式は $\frac{dt}{1-t}$ か $\frac{dt}{t}$ のいずれかで，一番左は $\frac{dt}{1-t}$，一番右は $\frac{dt}{t}$ となっている．このことはシャッフルをしても変わらないので，各項が収束する多重ゼータ値になるのである．

このシャッフル積を代数的に記述するのに便利なのは，Hoffman 代数とも呼ばれる，非可換多項式環 $\mathfrak{H}:=\mathbb{Q}\langle e_0,e_1\rangle$ である．e_0 が $\frac{dt}{t}$ に，e_1 が $\frac{dt}{1-t}$ に対応していると思って，$\mathbb{Q}\langle e_0,e_1\rangle$ の語（word, 単項式）のうち e_1 で始まり e_0 で終わるものと多重ゼータ値を一対一に対応づける．例えば $\zeta(2)$ に対応するのは e_1e_0 であり，これが先の積分表示を表していると思うのである．$\mathbb{Q}\langle e_0,e_1\rangle$ のシャッフル積 $ш$ は帰納的に

- 積は $\mathbb{Q}$ 双線形,

- $1ш w = wш 1 = w, \forall w : \text{word}$,

- $(uw)ш(u'w') = u(wш u'w') + u'(uwш w'),\ \forall u,u' \in \{e_0,e_1\},\ \forall w,w' : \text{words}$

で定義されて，$\mathbb{Q}\langle e_0,e_1\rangle$ の部分空間 $\mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q} + e_1\mathbb{Q}\langle e_0,e_1\rangle e_0$ が ш で閉じた部分代数となる．このとき，$e_1e_0^{k_1-1}\cdots e_1e_0^{k_r-1}$ に $\zeta(k_1,\ldots,k_r)$ を対応させる写像を $\mathbb{Q}$ 線形に拡張したものを Z と書くことにすると，多重ゼータ値のシャッフル積は「Z が $\mathfrak{H}^0$ から $\mathbb{R}$ への準同型である」ということに他ならない．

積分表示を述べたついでに言っておくべきこととして双対性がある．これは，収束インデックスを

$$\mathbf{k} = (\underbrace{1,\ldots,1}_{a_1-1}, b_1+1,\ldots,\underbrace{1,\ldots,1}_{a_h-1}, b_h+1) \quad (a_1, b_i \geq 1)$$

という形に書いて（常にこのように一通りに書ける），$\mathbf{k}$ の双対インデックス $\mathbf{k}^\dagger$ を

$$\mathbf{k}^\dagger = (\underbrace{1,\ldots,1}_{b_h-1}, a_h+1,\ldots,\underbrace{1,\ldots,1}_{b_1-1}, a_1+1)$$

定義するとき，等式

$$\zeta(\mathbf{k}^\dagger) = \zeta(\mathbf{k})$$

が成り立つ，というものである．証明は積分表示において変数変換 $t_i \to 1 - s_{k+1-i}$ を行えば直ちに出来る．初めての方はまず一番簡単な例である $\zeta(1,2) = \zeta(3)$ について確かめてみられるとよい．この変数変換は $\mathfrak{H}$ の言葉では，e_0 と e_1 を入れ替えて逆順に並べる，という操作に対応する．

インデックス $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_r)$ に対し $[\mathbf{k}] \in \mathcal{R}$ と $e_1e_0^{k_1-1}\cdots e_1e_0^{k_r-1} \in \mathfrak{H}$ を同一視することで，$\mathfrak{H}$ のシャッフル積を $\mathcal{R}$ に移行してきて，$\mathcal{R}$ にシャッフル積 ш を入れることが出来る．この積に関して $\mathbb{Q}$ 代数とみた $\mathcal{R}$ を $\mathcal{R}_ш$ と書く．$\mathcal{R}^0$ は ш に関する部分代数となり，これを $\mathcal{R}^0_ш$ と書く．$\zeta(2)^2$ の例で言うと $[2]ш[2] = 2[2,2] + 4[1,3]$ が対応する $\mathcal{R}$ での積である．Q 線形写像 $\zeta : \mathcal{R}^0 \to \mathbb{R}$ が $\mathcal{R}^0_ш$ から $\mathbb{R}$ への準同型になっているわけである：

$$\zeta([\mathbf{k}]\,ш\,[\mathbf{l}]) = \zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l}). \tag{3.1}$$

（$*$ のときと同様，左辺をしばしば $\zeta(\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l})$ と書く．）

二つの積 (2.2) および (3.1) を等号で結んで得られる線形関係式を，（有限）複シャッフル関係式と呼ぶ．

定理 3.1 (有限複シャッフル関係式)**.** 任意の収束インデックス $\mathbf{k}$ および $\mathbf{l}$ に対し，

$$\zeta(\mathbf{k} * \mathbf{l}) \ = \ \zeta(\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l})$$

が成り立つ．

これは常に非自明な関係式を与える．というのも，$\mathbf{k}ш\mathbf{l}$ に現れるインデックスの深さは $\mathbf{k}$ の深さと $\mathbf{l}$ のそれの和であるのに対し，$\mathbf{k} * \mathbf{l}$ には必ず深さがそれよりも落ちた項が現れるからである．例えば $\mathbf{k} = \mathbf{l} = (2)$ と取ると，$\zeta([2]*[2]) = 2\zeta(2,2) + \zeta(4)$ および $\zeta([2]ш[2]) = 2\zeta(2,2) + 4\zeta(1,3)$ であり，これから

$$4\zeta(1,3) = \zeta(4) \tag{3.2}$$

を得る． 二つの積から生じる関係式であるから，これが重さ最少で，重さ 5 では $\zeta(2)\zeta(3)$ と $\zeta(2)\zeta(1,2)$ から生じる二つの関係式が独立な線形関係式を与える．

重さ 3 の関係式 $\zeta(1,2)=\zeta(3)$ はこのやり方では出てこない．しかし仮に $\zeta(1)$ が収束していると思って調和積を計算すると，

$$\zeta(1)\zeta(2)=\zeta(1,2)+\zeta(2,1)+\zeta(3)$$

となる．右辺の $\zeta(2,1)$ は発散している．シャッフル積は，$\zeta(1)=\int_0^1\frac{dt}{1-t}$ と思って計算すると，

$$\zeta(1)\zeta(2)=2\zeta(1,2)+\zeta(2,1)$$

となる．この右辺同士が等しいと考えると，発散項 $\zeta(2,1)$ が丁度キャンセルして，有限量の等式

$$\zeta(1,2)+\zeta(3)=2\zeta(1,2),$$

すなわち Euler の $\zeta(1,2)=\zeta(3)$ が得られる．このように，発散するものまで考慮に入れて，そこから有限の量を取り出す操作を正当化するのが正規化と呼ばれるプロセスである．

4 正規化と拡張された複シャッフル関係式

この節で正規化の考え方と，基本的な定理を述べる．重要な役割を果たすのが $\zeta(1)$ であり，またガンマ関数である．

我々はインデックスの空間 $\mathcal{R}$ に，多重ゼータ値の級数表示を用いた積構造，積分表示を用いた積構造の二通りの代数構造を入れ，それぞれの積構造を持った $\mathbb{Q}$ 代数を $\mathcal{R}_*$ および $\mathcal{R}_ш$ と表した．基本的な事実は，これらがともに，収束インデックスの部分代数上，$\zeta(1)$，つまり [1] で生成される多項式代数となっているということである：

$$\mathcal{R}_*\simeq\mathcal{R}_*^0\big[[1]\big]\quad\text{および}\quad\mathcal{R}_ш\simeq\mathcal{R}_ш^0\big[[1]\big].$$

このことは ш については（$\mathbb{Q}\langle e_0,e_1\rangle$ の言葉に翻訳すると）古典的な事実で，$*$ については Hoffman が証明した．ここでは証明は与えないで，認めるとする．（右端に並ぶ 1 の個数に関する帰納法で，左程難なく証明は出来る．[4]，[8] 参照）例としては

$$\begin{aligned}
[3,1]&=[3]*[1]-[1,3]-[4]\\
&=[3]ш[1]-2[1,3]-[2,2],\\
[2,1,1]&=\frac{1}{2}[2]*[1]^{*2}-([1,2]+[3])*[1]+[1,1,2]+[1,3]+\frac{1}{2}[4]\\
&=\frac{1}{2}[2]ш[1]^{ш2}-2[1,2]ш[1]+3[1,1,2]
\end{aligned}$$

など．ここで $[1]^{*2}=[1]*[1],[1]^{ш2}=[1]ш[1]$ であり，以後 $[1]^{\bullet n}$（$\bullet=*$ または ш）は $\underbrace{[1]\bullet\cdots\bullet[1]}_{n\text{ times}}$ を表すものとする．

定義 4.1. 任意のインデックス $\mathbf{k}$ を

$$[\mathbf{k}] \;=\; \sum_{i=0}^{m} a_i * [1]^{*i} \in \mathcal{R}_*^0\big[[1]\big] \quad (a_i \in \mathcal{R}^0)$$

および

$$[\mathbf{k}] \;=\; \sum_{j=0}^{n} b_j ш [1]^{шj} \in \mathcal{R}_ш^0\big[[1]\big] \quad (b_j \in \mathcal{R}^0)$$

のように（それぞれ一意的に）書く．このとき，$*$- および ш-正規化多項式 $\zeta_*(\mathbf{k};T)$ および $\zeta_ш(\mathbf{k};T) \in \mathbb{R}[T]$ (T は不定元) をそれぞれ

$$\zeta_*(\mathbf{k};T) \;=\; \sum_{i=0}^{m} \zeta(a_i) T^i \quad \text{および} \quad \zeta_ш(\mathbf{k};T) \;=\; \sum_{j=0}^{n} \zeta(b_j) T^j$$

で定義する．

$\mathbf{k}$ が許容的であれば $\zeta_*(\mathbf{k};T) = \zeta_ш(\mathbf{k};T) = \zeta(\mathbf{k})$ である．

写像 $\mathbf{k} \mapsto \zeta_*(\mathbf{k};T)$ (resp. $\mathbf{k} \mapsto \zeta_ш(\mathbf{k};T)$) は，準同型 $\zeta : \mathcal{R}_*^0 \to \mathbb{R}$ (resp. $\zeta : \mathcal{R}_ш^0 \to \mathbb{R}$) を $\zeta_*([1];T) = T$ (resp. $\zeta_ш([1];T) = T$) によって $\mathcal{R}_* \to \mathbb{R}[T]$ (resp. $\mathcal{R}_ш \to \mathbb{R}[T]$) にまで一意的に拡張したものである．

例 4.2. 上記の例より，

$$\zeta_*(3,1;T) \;=\; \zeta(3)T - \zeta(1,3) - \zeta(4), \quad \zeta_ш(3,1;T) \;=\; \zeta(3)T - 2\zeta(1,3) - \zeta(2,2),$$

そして

$$\begin{aligned}\zeta_*(2,1,1;T) \;&=\; \frac{1}{2}\zeta(2)T^2 - (\zeta(1,2)+\zeta(3))T + \zeta(1,1,2) + \zeta(1,3) + \frac{1}{2}\zeta(4),\\ \zeta_ш(2,1,1;T) \;&=\; \frac{1}{2}\zeta(2)T^2 - 2\zeta(1,2)T + 3\zeta(1,1,2)\end{aligned}$$

となっている．

この定義は完全に代数的であるが，それぞれの多項式は次のような解析的な意味がある．まず $\zeta_*(\mathbf{k};T)$ であるが，命題 2.4 の証明で用いた有限和 $\zeta_N(k_1,\ldots,k_r)$ は，$k_r = 1$ ならば $N \to \infty$ のとき発散するが，その発散の度合いが $\zeta_N(1)$，つまり調和級数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}$$

の多項式オーダーの発散で（$\log N$ の多項式オーダーと言ってもよい），その多項式が $\zeta_*(\mathbf{k};\zeta_N(1))$ だというのである．このことは，$\zeta_N(k_1,\ldots,k_r)$ が調和積を満たしたことを思い出してみれば納得できるであろう．つまり定義 4.1 にある多項式と全く同じ形で $\zeta_N(k_1,\ldots,k_r)$ を，収束する $\zeta_N(\mathbf{m})$ たちの和を係数とする $\zeta_N(1)$ の多項式で書き表されるのである．

一方 $\zeta_ш(\mathbf{k};T)$ は，$k_r = 1$ のとき反復積分の上端を x で止めたものが $x \to 1$ のとき発散するが，それが $\int_0^x \frac{dt}{1-t}$ の多項式オーダーの発散で，その多項式が $\zeta_ш(\mathbf{k};T)$ （$T = \int_0^x \frac{dt}{1-t}$）で与えられる．このことも，反復積分の上端を x にしたものたちが同じシャッフル積を満たすことから従う．

さてこの二つの「正規化多項式」$\zeta_*(\mathbf{k};T)$ と $\zeta_ш(\mathbf{k};T)$ がガンマ関数のテイラー展開式を用いて見事に結びついている，というのが正規化の基本定理である．それを述べるために，多項式環 $\mathbb{R}[T]$ からそれ自身への $\mathbb{R}$ 線形写像（代数準同型ではない）ρ を，形式的べき級数環 $\mathbb{R}[T][[u]]$ における母関数表記を用いて

$$\rho(e^{Tu}) = A(u)e^{Tu}$$

で定義する．ここに

$$A(u) = \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\zeta(n)u^n\right) = 1 + \zeta(2)\frac{u^2}{2} - 2\zeta(3)\frac{u^3}{3!} + (6\zeta(4) + 3\zeta(2)^2)\frac{u^4}{4!} + \cdots \in \mathbb{R}[[u]]$$

であり，左辺の ρ は各係数ごとに作用しているとする．つまり，右辺が

$$1 + a_1(T)u + a_2(T)\frac{u^2}{2!} + a_3(T)\frac{u^3}{3!} + a_4(T)\frac{u^4}{4!} + \cdots$$

であるとしたとき，$\rho(T^n) = a_n(T)$ によって $\mathbb{R}$ 線形写像 ρ が定まる．べき級数 $A(u)$ の正体は，$A(u) = e^{\gamma u}\Gamma(1+u)$（$\gamma$ はオイラー定数）である．

例 4.3. 実際に積を展開してやると

$$\begin{aligned}
\rho(1) &= 1,\\
\rho(T) &= T,\\
\rho(T^2) &= T^2 + \zeta(2),\\
\rho(T^3) &= T^3 + 3\zeta(2)T - 2\zeta(3),\\
\rho(T^4) &= T^4 + 6\zeta(2)T^2 - 8\zeta(3)T + 6\zeta(4) + 3\zeta(2)^2.
\end{aligned}$$

必ず $\rho(T^n) = T^n +$ 低次の項 となるので，ρ は可逆である．

さて，二つの正規化多項式はこの ρ により移りあう．

定理 4.4 ([6, Theorem 1])**.** 任意のインデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta_ш(\mathbf{k};T) = \rho\big(\zeta_*(\mathbf{k};T)\big) \tag{4.1}$$

が成り立つ．

例えば，先の例から，$\rho(\zeta_*(2,1,1;T)) = \zeta_ш(2,1,1;T)$ より

$$\frac{1}{2}\zeta(2)(T^2+\zeta(2)) - (\zeta(1,2)+\zeta(3))T + \zeta(1,1,2) + \zeta(1,3) + \frac{1}{2}\zeta(4) = \frac{1}{2}\zeta(2)T^2 - 2\zeta(1,2)T + 3\zeta(1,1,2).$$

両辺の一次の係数を比べて $\zeta(1,2) = \zeta(3)$ が，定数項を比べて

$$\frac{1}{2}\zeta(2)^2 + \zeta(1,1,2) + \zeta(1,3) + \frac{1}{2}\zeta(4) = 3\zeta(1,1,2)$$

が得られる．この重さ 4 の関係式には $\zeta(2)^2$ という項があるが，これを調和積で和に直すと

$$\zeta(2,2) + \zeta(1,3) + \zeta(4) = 2\zeta(1,1,2)$$

という線形関係式が，またシャッフル積で和に直すと

$$\zeta(2,2)+3\zeta(1,3)+\frac{1}{2}\zeta(4)=2\zeta(1,1,2)$$

という関係式が得られる．

定理の証明は，少し触れた正規化多項式の解析的意味をもとにして，反復積分の上端が x のもののテイラー展開（「多重ポリログ」）係数に有限打ち切りの $\zeta_N(k_1,\ldots,k_r)$ が現れていることから，二つの発散を比べることで得られる．なぜそこにガンマ関数が現れるのか，を一言で述べるのは難しい．私自身，証明を見ても釈然としないものが残っている．しかし一方で，次の川崎さんの講演で出て来る，“integral-series identity” というもの，これがある意味で正規化基本定理と等価であって，その等式および等価性は「ほとんど」代数的に証明出来る． ガンマ関数の果たしている役割というのもこちらから理解することが出来るかも知れない． このあたりのことまで解説することが出来ないのは残念であるが，興味のある方は是非山本さんとの共著論文 [7] を見て頂きたく思う．

関係式 (4.1) の係数を比べて得られる式と二通りの積

$$\zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l}) \;=\; \zeta(\mathbf{k}*\mathbf{l}) \;=\; \zeta(\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l}) \tag{4.2}$$

を合わせれば，多重ゼータ値のすべての $\mathbb{Q}$ 上の関係式が得られるのではないか，と思われている．多重ゼータ値の積は (4.2) のいずれかにより和に書き換えられるので，すべての線形関係式が記述できればよいが，その候補の一つが，[6] にある

$$\zeta_*(\mathbf{k}*\mathbf{l}-\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l};0)=0 \quad (\forall\mathbf{k}\in\mathcal{R}^0 \text{ and } \forall\mathbf{l}\in\mathcal{R})$$

または

$$\zeta_ш(\mathbf{k}*\mathbf{l}-\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l};0)=0 \quad (\forall\mathbf{k}\in\mathcal{R}^0 \text{ and } \forall\mathbf{l}\in\mathcal{R})$$

からすべての線形関係式が出るのではないか，という予想で，これらの関係式を正規化複シャッフル関係式，または拡張複シャッフル関係式と呼んでいる．これらは (4.1) からほぼ直ちに出て来る．

例えば，$\mathbf{k}=(2), \mathbf{l}=(1)$ と取ると，

$$\mathbf{k}*\mathbf{l}-\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l} \;=\; [3]-[1,2]$$

であり，従って

$$\zeta_*(\mathbf{k}*\mathbf{l}-\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l};T) \;=\; \zeta_ш(\mathbf{k}*\mathbf{l}-\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l};T)=\zeta(3)-\zeta(1,2).$$

これはすなわち $\zeta(3)=\zeta(1,2)$ を与える．また $\mathbf{k}=(3), \mathbf{l}=(1)$ と取ると，

$$\mathbf{k}*\mathbf{l}-\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l} \;=\; [4]-[1,3]-[2,2]$$

であり，

$$\zeta_ш(\mathbf{k}*\mathbf{l}-\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l};T) \;=\; \zeta(4)-\zeta(1,3)-\zeta(2,2)$$

となるから，

$$\zeta(4)=\zeta(1,3)+\zeta(2,2)$$

を得る．次に $\mathbf{k}=(2), \mathbf{l}=(1,1)$ と取ると，

$$\mathbf{k}*\mathbf{l}-\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l} \;=\; [1,3]+[3,1]-2[1,1,2]-[1,2,1].$$

少し計算すれば

$$\zeta_{ш}(\mathbf{k}*\mathbf{l}-\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l};T) \;=\; (\zeta(3)-\zeta(1,2))\,T-\zeta(1,3)-\zeta(2,2)+\zeta(1,1,2)$$

となり，定数項から

$$\zeta(1,3)+\zeta(2,2)=\zeta(1,1,2)$$

を得る． これら二つの関係式と，すでに有限複シャッフル関係式として得ている (3.2) を合わせると重さ 4 の三つの独立な線形関係式が得られて，

$$\zeta(1,3)=\frac{1}{4}\zeta(4),\ \zeta(2,2)=\frac{3}{4}\zeta(4),\ \zeta(1,1,2)=\zeta(4)$$

を得る．すなわち $\mathcal{Z}_4=\mathbb{Q}\cdot\zeta(4)$ （一次元）である．

参考文献

[1] P. Deligne and A. Goncharov, Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, (4) **38** (2005), 1–56.

[2] A. B. Goncharov, Periods and mixed motives, *preprint*, (2002).

[3] M. Hoffman, Multiple harmonic series, *Pacific J. Math* **152** (1992), 275–290.

[4] M. Hoffman, The algebra of multiple harmonic series, *J. Algebra* **194** (1997), 477–495.

[5] M. Hoffman, *References on multiple zeta values and Euler sums* (web page), `https://www.usna.edu/Users/math/meh/biblio.html`

[6] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, *Compositio Math.* **142** (2006), 307–338.

[7] M. Kaneko and S. Yamamoto, A new integral-series identity of multiple zeta values and regularizations, *Selecta Mathematica*, **24** (2018), 2499–2521.

[8] C. Reutenauer, *Free Lie Algebras*, Oxford Science Publications, 1993.

[9] T. Terasoma, Mixed Tate motives and multiple zeta values, *Invent. Math.*, **149** (2002), 339–369.

[10] S. Yamamoto, Multiple zeta-star values and multiple integrals, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B68** (2017), 3–14.

[11] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, in ECM volume, *Progress in Math.*, **120** (1994), 497–512.

Faculty of Mathematics, Kyushu University
744 Motooka, Nishi-ku, Fukuoka, 819-0395, JAPAN
e-mail: `mkaneko@math.kyushu-u.ac.jp`