整数論サマースクール 4 日目の講義「BROWN の定理の証明の概略」のレジュメ

広瀬稔 (MINORU HIROSE)

Contents

Introduction

本稿の目的は Brown による次の定理の証明を紹介することである。

定理 1 (Brown). 全ての多重ゼータ値は

$$\{\zeta(k_1,\dots,k_r) \mid k_1,\dots,k_r \in \{2,3\}\}$$

の $\mathbb{Q}$-線形和として表される。

Brown の定理の証明の鍵は次の 3 つである

(1) $\mathbb{Z}$ 上の混合テイトモチーフの理論（とモチビックな反復積分の理論）からの帰結.
(2) Zagier の恒等式
(3) 初等的な議論

本稿では，1,2 について証明抜きで紹介し，3 の部分について解説する.

1. 混合テイトモチーフの理論から導かれる事実の紹介

本稿では混合テイトモチーフの周期の理論から導かれる次の事実を仮定する。

(1) 余積構造付き次数付可換環 $\mathcal{H} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$ の存在.
(2) $\mathcal{H}$ の具体的な構造定理.
(3) 周期写像 per : $\mathcal{H} \to \mathbb{R}$ の存在.
(4) モチビックな反復積分（多重ゼータ値）とその性質.
(5) モチビックな反復積分の余積の計算.（Goncharov-Brown の余積公式)

Date: August 28, 2018.

本節では，これらの詳しい内容について解説する．

1.1. $\mathcal{H}$ について．

定理 2. $\mathbb{Z}$ 上の混合モチーフの周期の理論から，次を満たす三つ組 $(\mathcal{H}, \zeta^{\mathfrak{m}}(2), \Delta)$ が得られる．[1]

(1) $\mathcal{H} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$ は次数付き可換環.
  (a) $\zeta^{\mathfrak{m}}(2)$ は $\mathcal{H}_2$ の元.
  (b) Δ は準同型 $\mathcal{H} \to \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}$．ここで $\mathcal{A} := \mathcal{H}/(\zeta^{\mathfrak{m}}(2))$ と置いた.[2]

1.2. $\mathcal{H}$ の構造定理.

定義 1. 可換環 $\mathcal{U}'$ を次で定める．まず底空間は

$$\begin{aligned}\mathcal{U}' &= \mathbb{Q}\langle f_{2i+1} \mid i \geq 1 \rangle = \mathbb{Q}\langle f_3, f_5, f_7, \dots \rangle \\ &= \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}f_3 \oplus \mathbb{Q}f_5 \oplus \mathbb{Q}f_3f_3 \oplus \mathbb{Q}f_7 \oplus \mathbb{Q}f_3f_5 \oplus \mathbb{Q}f_5f_3 \oplus \cdots\end{aligned}$$

とする．積はシャッフル積[3]で定める

定義 2. 可換環 $\mathcal{U}$ を

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}' \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[f_2]$$

で定める．

以下 $\mathcal{U}$ の元 $f_{i_1} \cdots f_{i_n} \otimes f_2^m$ を単に $f_{i_1} \cdots f_{i_n} f_2^m$ と書く．

定義 3. 準同型

$$\Delta : \mathcal{U} \to \mathcal{U}' \otimes \mathcal{U}$$

を

$$\Delta(f_{i_1} \cdots f_{i_n} f_2^m) = \sum_{k=0}^{n} f_{i_1} \cdots f_{i_k} \otimes f_{i_{k+1}} \cdots f_{i_n} f_2^m$$

で定める．

定義 4. $\deg(f_i) = i$ とすることにより $\mathcal{U}$ を次数付き環とみなす．つまり

$$\mathcal{U}_k = \bigoplus_{\substack{d \geq 0 \\ m \geq 0 \\ i_1, \dots, i_d \in \{3,5,7,\dots\} \\ i_1 + \cdots + i_d + 2m = k \\ i_1 + \cdots + i_d}} \mathbb{Q} f_{i_1} \cdots f_{i_d} f_2^m.$$

定理 3. 付加構造付き次数付き環 $(\mathcal{H}, \zeta^{\mathfrak{m}}(2), \Delta)$ と $(\mathcal{U}, f_2, \Delta)$ の間には（非標準的）な同型[4]ϕ が存在する．

---

[1] この定理における $\mathcal{H}$ は萩原氏のレジュメの定理 1.2 における $\mathscr{H}$ である。

[2] Δ は Hopf 代数の余積と似た数多くの性質を満たす．例えば $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$ である．また Δ が誘導する写像 $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ によって $\mathcal{A}$ は Hopf 代数になる．また $\mathcal{H}$ は $\mathcal{A}$ の comodule となる．これらの事実は $\mathcal{H}$ の具体的な構造定理からも従う．

[3] シャッフル積とは，に対する $x \sqcup 1 = 1 \sqcup x = x$ と $f_a x \sqcup f_b y = f_a(x \sqcup f_b y) + f_b(f_a x \sqcup y)$ で帰納的に定まる二項演算である．ただし $x, y \in \mathcal{U}'$，$a, b \in \{3, 5, 7, \dots\}$.

[4] 同型の正確な意味は次の通り．

- $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{U}$ は次数付き環の環準同型
- $\phi(\zeta^{\mathfrak{m}}(2)) = f_2$

1.3. **周期写像.**

定理 4. 標準的な環準同型写像

$$\mathrm{per} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$$

が存在する.(周期写像と呼ばれる. 単射と予想されている.)

1.4. **モチビックな反復積分.**

0 以上の整数 k と $a_0, \dots, a_{k+1} \in \{0, 1\}$ に対してモチビックな反復積分 (motivic integral)

$$I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) \in \mathcal{H}_k$$

が定義される. $I^{\mathfrak{m}}$ が満たす代表的な性質を挙げる

(1) $k \geq 1$ かつ $a_0 = a_{k+1}$ なら $I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) = 0$.
(2) $I(a_0; a_1) = 1$.
(3) $I(0; 0; 1) = 0$.
(4) $I^{\mathfrak{m}}(a_0; \alpha; b)$ は shuffle 関係式

$$I^{\mathfrak{m}}(a; \alpha; b) \cdot I^{\mathfrak{m}}(a; \beta; b) = I^{\mathfrak{m}}(a; \alpha \sqcup\!\sqcup\, \beta; b)$$

を満たす.

(5) $I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) = (-1)^k I^{\mathfrak{m}}(a_{k+1}; a_k, \dots, a_1; a_0)$
(6) $I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) = I^{\mathfrak{m}}(1 - a_0; 1 - a_1, \dots, 1 - a_k; 1 - a_{k+1})$
(7) $\mathrm{per}(I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1})) = I(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1})$.

定義 5 (モチビック多重ゼータ値)**.** $\mathbb{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r$ に対して

$$\zeta^{\mathfrak{m}}(\mathbb{k}) = (-1)^r I^{\mathfrak{m}}(0; 10^{k_1 - 1} \cdots 10^{k_r - 1}; 1)$$

と置く. 性質 (7) より $\mathrm{per}(\zeta^{\mathfrak{m}}(\mathbb{k})) = \zeta(\mathbb{k})$ である.

演習 1. 性質 3 と 4 から

$$\sum_{i=0}^{k} I^{\mathfrak{m}}(0; a_1, \dots, a_i, 0, a_{i+1}, \dots, a_k; 1) = 0$$

が従う. これを用いて次を示せ

$$I^{\mathfrak{m}}(0; \overbrace{0, \dots, 0}^{a}, 1, \overbrace{0, \dots, 0}^{b}; 1) = (-1)^{a+1} \binom{a+b}{a} \zeta^{\mathfrak{m}}(a + b + 1)$$

1.5. **motivic coaction formula for iterated integral.**

$\pi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}/\zeta^{\mathfrak{m}}(2) = \mathcal{A}$ を自然な射影とする.

定理 5 (Goncharov-Brown の余積公式)**.** $\Delta I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1})$ は

$$\sum_{s=1}^{k+1} \sum_{\substack{i_0 < i_1 < \cdots < i_s \\ i_0 = 0, i_s = k+1}} \pi\Big(\prod_{p=0}^{s-1} I^{\mathfrak{m}}(a_{i_p}; a_{i_p + 1}, \dots, a_{i_{p+1} - 1}; a_{i_{p+1}})\Big) \otimes I^{\mathfrak{m}}(a_{i_0}; a_{i_1}, \dots, a_{i_{s-1}}; a_{i_s})$$

- 次の図式は可換

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathcal{A} \otimes \mathcal{H} \arrow[d, "\phi \otimes \phi"] \\ \mathcal{U} \arrow[r, "\Delta"] & \mathcal{U}' \otimes \mathcal{U} \end{tikzcd}$$

と等しい．[5]

例 1.

$$\begin{aligned}\Delta I(a;b,c;d) &= I(a,b,c,d)\otimes I(a,d)\\ &\quad +I(a,b)I(b,c,d)\otimes I(a,b,d)\\ &\quad +I(a,b,c)I(c,d)\otimes I(a,c,d)\\ &\quad +I(a,b)I(b,c)I(c,d)\otimes I(a,b,c,d).\end{aligned}$$

2. $\mathcal{H}$ のフィルトレーション

定義 6. $\mathcal{U}$ 上のフィルトレーション $0=F_{-1}\mathcal{U}\subset F_0\mathcal{U}\subset F_1\mathcal{U}\subset\cdots\subset\mathcal{U}$ を

$$F_d\mathcal{U}=\bigoplus_{e=0}^{d}\bigoplus_{\substack{i_1,\dots,i_e\\ \in\{3,5,7,\dots\}}}\bigoplus_{s=0}^{\infty}f_{i_1}\cdots f_{i_e}f_2^s$$

で定める．また，$F_d\mathcal{H}=\phi^{-1}(\mathcal{F}_d\mathcal{U})$ と置く．

演習 2. $F_d\mathcal{H}$ が ϕ の選び方に依存しないことを示せ．

また $\mathrm{gr}_l\mathcal{U}=F_l\mathcal{U}/F_{l-1}\mathcal{U}$, $\mathrm{gr}_l\mathcal{H}=F_l\mathcal{H}/F_{l-i}$ と置く．

命題 1. $x\in\mathcal{H}_k$ で $\Delta(x)-1\otimes x-x\otimes 1=0$ となるとき，

$$x\in\begin{cases}F_0\mathcal{H} & k:\mathrm{even}\\ F_1\mathcal{H} & k:\mathrm{odd}\end{cases}$$

定義 7. $\tilde{\Delta}(x)=\Delta(x)-1\otimes x$.

命題 2. $x\in\mathcal{H}$ が $\tilde{\Delta}x\in\mathcal{A}\otimes F_d\mathcal{H}$ を満たすとき $x\in F_{d+1}\mathcal{H}$.

演習 3. 命題 1, 2 を証明せよ．

命題 1,2 と Goncharov-Brown の余積公式を組み合わせることで，色々なことが証明可能である．

命題 3. $k\in\mathbb{N}$ に対してを $\zeta^{\mathfrak{m}}(2k)\in\mathbb{Q}^{\times}f_2^k,\zeta^{\mathfrak{m}}(2k+1)\in\mathbb{Q}^{\times}f_{2k+1}$.

命題 4. 任意の $k_1,\dots,k_r\in\mathbb{N}$ に対して $\zeta^{\mathfrak{m}}(k_1,\dots,k_r)\in F_r\mathcal{H}$.

命題 5. $\zeta^{\mathfrak{m}}(\{2\}^n)\in\mathbb{Q}^{\times}f_2^n$.

---

[5] この公式で，積となる部分が $\otimes$ の左側に来ることは，次のようにして覚えることができる．Goncharov-Brown の公式はより一般の反復積分

$$I^{\mathfrak{m}}_{\gamma}(a_0;a_1,\dots,a_k;a_{k+1})\quad(a_0,\dots,a_{k+1}\in\bar{\mathbb{Q}}\subset\mathbb{C},\ \gamma\text{は } a_0 \text{ から } a_{k+1} \text{ へのパス})$$

にも一般化され $\Delta I_{\gamma}(a_0;a_1,\dots,a_k;a_{k+1})$ は

$$\sum_{\substack{i_0<i_1<\cdots<i_s\\ i_0=0,i_s=k+1}}\pi\Big(\prod_{p=0}^{k-1}I^{\mathfrak{m}}(a_{i_p};a_{i_p+1},\dots,a_{i_{p+1}-1};a_{i_{p+1}})\Big)\otimes I^{\mathfrak{m}}_{\gamma}(a_0;a_{i_1},\dots,a_{i_{s-1}};a_{k+1})$$

となる．ここで，$\otimes$ の左側の積に現れる $I^{\mathfrak{m}}(a_{i_p};a_{i_p+1},\dots,a_{i_{p+1}-1};a_{i_{p+1}})$ は，始点が a_{i_p} で終点が $a_{i_{p+1}}$ となるため γ から標準的に定めることが出来ない．よって $\otimes$ の左側の積は well-define にならないように見えるが，実は反復積分は modulo$2\pi i$ でみると，パスのとり方に依らないことが証明できる．よって適切な quotient をとることで式が well-defined になるのである．

命題 6. $k \geq 0$ と $a_0, \dots, a_{k+1} \in \{0,1\}$ に対して $d \geq 0$ を

$$d = \#\{0 \leq i \leq k \mid a_i = a_{i+1}\}$$

で定める．このとき

$$I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) \in F_d\mathcal{H}$$

が成立する．

雰囲気を掴むために，命題 5 の証明を説明する．

Proof. n に関する帰納法で証明する．$(-1)^n\zeta^{\mathfrak{m}}(\{2\}^n) = I^{\mathfrak{m}}(0; \overbrace{1,0,\dots,1,0}^{2n}; 1)$ と置く．帰納法の仮定および reversal formula より任意の $0 < k < n$ および任意の $0 < m$ に対して

$$\begin{aligned}
\pi(I^{\mathfrak{m}}(0; \overbrace{1,0,\dots,1,0}^{2k}; 1)) &= 0 \\
\pi(I^{\mathfrak{m}}(1; \overbrace{0,1,\dots,0,1}^{2k}; 0)) &= 0 \\
I^{\mathfrak{m}}(0; \overbrace{1,0,\dots 1,0,1}^{2m-1}; 0) &= 0 \\
I^{\mathfrak{m}}(1; \overbrace{0,1,\dots 0,1,0}^{2m-1}; 1) &= 0
\end{aligned}$$

となる．$\Delta I^{\mathfrak{m}}(0; \overbrace{1,0,\dots,1,0}^{2n}; 1)$ を Goncharov-Brown の公式

$$\sum_{\substack{i_0 < i_1 < \cdots < i_k \\ i_0 = 0, i_k = n+1}} \pi(\prod_{p=0}^{k-1} I^{\mathfrak{m}}(a_{i_p}; a_{i_p+1}, \dots, a_{i_{p+1}-1}; a_{i_{p+1}})) \otimes I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_{i_1}, \dots, a_{i_k}; a_{n+1})$$

を用いて計算する．このとき $\pi(I^{\mathfrak{m}}(a_{i_p}; a_{i_p+1}, \dots, a_{i_{p+1}-1}; a_{i_{p+1}}))$ に着目する．$(a_{i_p}, a_{i_p+1}, \dots, a_{i_{p+1}-1}, a_{i_{p+1}})$ は $(0, \overbrace{1,0,\dots,1,0}^{2n}, 1)$ の部分列である．よって $\pi(I^{\mathfrak{m}}(a_{i_p}; a_{i_p+1}, \dots, a_{i_{p+1}-1}; a_{i_{p+1}}))$ は $i_{p+1} = i_p + 1$ となる場合，または $(i_p, i_{p+1}) = (0, 2n+1)$ となる場合を除き 0 となる．よって $x_n = I^{\mathfrak{m}}(0; \overbrace{1,0,\dots,1,0}^{2n}; 1)$ と置くと

$$\Delta x_n = x_n \otimes 1 + 1 \otimes x_n$$

となる．よって命題 1 より $x_n \in \mathbb{Q}f_2^n$ である．最後に $x_n \neq 0$ を証明しよう．これは $\mathrm{per}((-1)^n x_n) = \zeta(\{2\}^n) > 0$ から従う． □

演習 4. 命題 3，6 を証明せよ．

演習 5. F_d をより精密化したフィルトレーション $\tilde{F}$ を

$$\tilde{F}_d\mathcal{U} = \bigoplus_{s=0}^{\infty} \bigoplus_{\substack{e \leq d \ (s=0\ \text{の場合}) \\ e \leq d-1 \ (s>0\ \text{の場合})}} \bigoplus_{\substack{i_1,\dots,i_e \\ \in \{3,5,7,\dots\}}} f_{i_1} \cdots f_{i_e} f_2^s$$

と $\tilde{F}_d\mathcal{H} = \phi^{-1}(\tilde{F}_d\mathcal{U})$ で定める．このとき

$$\zeta(k_1, \dots, k_d) \in \tilde{F}_d\mathcal{U}$$

を示せ.（これは命題 4 の精密化である）

演習 6. $D_{k,d} = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{gr}_d \mathcal{H}_k$ と置くとき，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} D_{k,d} x^k y^d = \frac{1}{1-x^2-x^3y}$$

を証明せよ．この母関数表示から $D_{k,d}$ は重さ k，レベル d の Hoffman index の個数

$$\#\{\Bbbk = (k_1,\dots,k_r) \in \{2,3\}^r \mid \mathrm{wt}(\Bbbk) = k,\ \#\{i \mid k_i = 3\} = d\}$$

に等しいことが分かる．

3. Charlton の Block notation

本節では Charlton のブロック記法 (Block notation) を用いて Brown の証明を解説する．Charlton のブロック記法は最近（Brown の結果よりも後に）導入された概念であるが，Hoffman index のような対象を扱うのに便利である．ブロック記法を扱う際は反復積分記号

$$I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, \dots, a_n; a_{n+1})$$

をセミコロンを使わず

$$I^{\mathfrak{m}}(a_0, a_1, \dots a_n, a_{n+1})$$

と書いたほうが分かりやすいので，以後はセミコロンを使わないこの表記法を採用する．

0 と 1 を交互に並べて得られる空でない有限 01 列をブロックと呼ぶ．次はブロックの例である．

010101 (長さ 6，先頭文字 0，末尾文字 1)

101 (長さ 3，先頭文字 1，末尾文字 1)

0 (長さ 1，先頭文字 0，末尾文字 0).

定義 8. $d \geq 0$ と $k_0,\dots,k_d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して 0 から始まる 01 列 $B(k_0,\dots,k_d)$ を

$$B(k_0,\dots,k_d) = W_0 \cdots W_d$$

で定める．ただし，$W_0,\dots,W_d$ は次で特徴づけられる唯一の 01 列である．

- $W_0,\dots,W_d$ は長さ $k_0,\dots,k_d$ のブロック
  - W_0 の先頭文字は 0．また $i = 1,\dots,d$ に対して W_i の先頭文字は W_{i-1} の末尾文字に等しい．

例えば

$$B(3,4,5) = \overbrace{010}^{3}\overbrace{0101}^{4}\overbrace{10101}^{5}$$

である．任意の 0 から始まる任意の 01 列は，$B(k_0,\dots,k_d)$ の形で一意的に表すことが可能である．

定義 9. 反復積分記号 $I^{\mathfrak{m}}()$ に $B(k_0,\dots,k_d)$ を入れたものを $I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(k_0,\dots k_d)$ で表す．例えば

$$I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(3,4,5) = I(0,1,0,0,1,0,1,1,0,1,0,1).$$

(反復積分の端点も 01 列の一部と見なすことに注意．よって $I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(k_0,\dots k_d)$ の重さは $k_0 + \cdots + k_d - 2$ である).

また $I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(k_0,\dots k_d) := \mathrm{per}(I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(k_0,\dots k_d))$ と置く．

演習 7. 次を確認せよ．

$$\zeta^{\mathfrak{m}}(\{2\}^{k_0}, 3, \{2\}^{k_2}, 3, \dots, \{2\}^{k_{d-1}}, 3, \{2\}^{k_d}) = \pm I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(2k_0+1,\dots,2k_{d-1}+1, 2k_d+2).$$

4. Brown の定理の証明

重さ k，レベル d の Hoffman index[6]と対応する，ブロック記法の index の集合を

$$\mathrm{BH}_{N,d} = \{(k_0,\ldots,k_d) \mid k_0,\ldots,k_{d-1} \in 1+2\mathbb{Z}_{>0},\ k_d \in 2\mathbb{Z}_{>0},\ k_0+\cdots+k_d = N-2\}$$

と置く．

本節では次の定理を証明する．

定理 6. $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\{\zeta^{\mathfrak{m}}(k_1,\ldots,k_r) \mid k_i \in \{2,3\}, \#\{j \mid n_j = 3\} \leq d\}$$

は $F_d\mathcal{H}$ の $\mathbb{Q}$-ベクトル空間としての基底となる．

これは次と同値である．

定理 7. $N, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\{I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(\mathbb{k}) \in \mathrm{gr}_d\mathcal{H}_N \mid \mathbb{k} \in \mathrm{BH}_{N,d}\}$$

は $\mathrm{gr}_d\mathcal{H}_N$ の元として $\mathbb{Q}$ 上一次独立である．

演習 8. 定理 6 と 7 の同値性を確認せよ．

定義 10. $N \geq 0$ と $d \geq 1$ に対して，同型写像

$$\partial_{N,d} : \mathrm{gr}_d\mathcal{H}_N \to \bigoplus_{\substack{1<r\leq N \\ r:3\text{ 以上の奇数}}} \mathrm{gr}_{d-1}\mathcal{H}_{N-r}$$

を次で定める．まず $\tilde{\Delta}F_d\mathcal{H} \subset \mathcal{H} \otimes F_{d-1}\mathcal{H}$ より $\tilde{\Delta}$ は写像 $\tilde{\Delta} : \mathrm{gr}_d\mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathrm{gr}_{d-1}\mathcal{H}$ を誘導する．このとき $\tilde{\Delta}(\mathrm{gr}_d\mathcal{H}) = F_1\mathcal{H} \otimes \mathrm{gr}_{d-1}\mathcal{H}$ が分かる．特に weight N の部分を見ると

$$\tilde{\Delta}(\mathrm{gr}_d\mathcal{H}_N) = \bigoplus_{\substack{1<r\leq N \\ r:3\text{ 以上の奇数}}} F_1\mathcal{H}_r \otimes \mathrm{gr}_{d-1}\mathcal{H}_{N-r}$$

である．$\partial_{N,d}$ は合成写像

$$\mathrm{gr}_d\mathcal{H}_N \xrightarrow[\simeq]{\tilde{\Delta}} \bigoplus_{\substack{1<r\leq N \\ r:3\text{ 以上の奇数}}} F_1\mathcal{H}_r \otimes \mathrm{gr}_{d-1}\mathcal{H}_{N-r} \xrightarrow[\simeq]{(r-1)2^{2-r}\zeta^{\mathfrak{m}}(r)\otimes x \mapsto x} \bigoplus_{\substack{1<r\leq N \\ r:3\text{ 以上の奇数}}} \mathrm{gr}_{d-1}\mathcal{H}_{N-r}$$

で定義される．

定理 7 は，d に関する帰納法で証明する．$d = 0$ の場合は簡単なので $d \geq 1$ としよう．定理を示すには

$$\{\partial_{N,d}(I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(\mathbb{k})) \mid \mathbb{k} \in \mathrm{BH}_{N,d}\}$$

が一次独立であることを示せばよい．命題 5 に注意しながら Goncharov-Brown の余積公式を用いると

$$\tilde{\Delta}I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(k_0,\ldots,k_d) = \sum_{s=0}^{d-1}\sum_{3<r\leq} \xi^r_{k_s,k_{s+1}} \otimes I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(k_0,\ldots,k_{s-1},k_s+k_{s+1}-r,k_{s+2},\ldots,k_d)$$

[6]Hoffman index のレベルとは 3 の個数のこと．

where

$$\xi^r_{x,y} = \sum_{\substack{0<x'\le a\\ 0<y'\le b\\ x'+y'=r+2}} \pi(I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(x',y')).$$

となる．ここで，$\pi(I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(a,b))$ の値を教えてくれるのが次の公式である．

定理 8 (Zagier の恒等式)**.** 1 以上の奇数 x と 2 以上の偶数 y に対して

$$I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(x,y) \quad = \quad 2\sum_{\substack{1<m<x+y\\ m\equiv 1 \pmod 2}} \left(\binom{m-1}{x-1} - \left(1-\frac{2}{2^m}\right)\binom{m-1}{y-1}\right) I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(x+y-m)\zeta^{\mathfrak{m}}(m).$$

特に $\pi(I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(x,y)) \in \mathcal{A}$ は次に等しい*:*

$$2\left(\binom{x+y-3}{x-1} - \left(1-\frac{2}{2^{x+y-2}}\right)\binom{x+y-3}{y-1}\right)\zeta^{\mathfrak{m}}(x+y-2).$$

演習 9. 定理の $x=1$ の場合は，$x\ge 3$ の場合に帰着されることを示せ．

演習 10. 実際に Zagier が証明したのは（モチビック版ではなく）実数に対する等式

$$I_{\mathrm{bl}}(x,y) = 2\sum_{\substack{1<m<x+y\\ m\equiv 1 \pmod 2}} \left(\binom{m-1}{x-1} - \left(1-\frac{2}{2^m}\right)\binom{m-1}{y-1}\right) I_{\mathrm{bl}}(x+y-m)\zeta(m)$$

である．この等式からモチビック版を証明せよ．

Zagier の恒等式から次が従う．

$$(4.1)\quad \xi^r_{x,y} = 2\zeta^{\mathfrak{m}}(r)\times\left(\begin{cases}\binom{r-1}{x-1} & x:\mathrm{odd}\\ \left(1-\frac{2}{2^r}\right)\binom{r-1}{x-1} & x:\mathrm{even}\end{cases} - \begin{cases}\binom{r-1}{y-1} & y:\mathrm{odd}\\ \left(1-\frac{2}{2^r}\right)\binom{r-1}{y-1} & y:\mathrm{even}\end{cases}\right)$$

演習 11. Zagier の恒等式を用いて，(4.1) を証明せよ．

この式を具体的に行列表示したものを

$$\partial_{N,d}(I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(\Bbbk)) = \sum_{\Bbbk'} M_{\Bbbk,\Bbbk'} I^{\mathfrak{m}}_{\mathrm{bl}}(\Bbbk')$$

とする．ただし，$\Bbbk$ は $\mathrm{BH}_{N,d}$ の元を動き，$\Bbbk'$ は $\bigcup_{\substack{1<r\le N\\ r:3\text{ 以上の奇数}}} \mathrm{BH}_{N-r,d-1}$ の元を動く．

あとは $M := (M_{\Bbbk,\Bbbk'})_{\Bbbk,\Bbbk'}$ が可逆行列であることを示せば定理 7 の証明が完了する．これは次の事実から従う．

(1) M は全ての成分が $\mathbb{Z}_{(2)} := \{a/b \mid b:\mathrm{odd}\}$ に属する．
(2) M は（行と列を適切に並べたら）

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix} \pmod{2\mathbb{Z}_{(2)}}.$$

特に $\det M \equiv 1 \pmod{2\mathbb{Z}_{(2)}}$.

演習 12. (1),(2) が成立していることを確認せよ．

5. Brown の定理の系

定理 6 および命題 4，6 の系として次が得られる．

定理 9. $k,d \geq 0$ とする．以下はいずれも重さ k，レベル d 以下の *Hoffman basis*

$$\{\zeta(k_1,\dots,k_r) \mid k_1,\dots,k_r \in \{2,3\},\ k_1+\cdots+k_r=k,\ \#\{j \mid n_j=3\} \leq d\}$$

の $\mathbb{Q}$-線形和となる．

(1) $\zeta(k_1,\dots,k_e)\times\pi^{2s}$．ただし，$k_1+\cdots+k_e+2s=k$, $e\leq d$.
(2) $I_{\mathrm{bl}}(k_0,\dots,k_e)$．ただし，$k_0+\cdots+k_e=k-2$, $e\leq d$.
(3) $\prod_{j=1}^m I_{\mathrm{bl}}(k_0^{(j)},\dots,k_{e_j}^{(j)})$．ただし $\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^{e_j} k_i^{(j)}=k-2m$, $\sum_{j=1}^m e_j\leq d$.

注意 1．(3) は (2) の一般化である．

6. より一般の状況について

$K\subset\mathbb{C}$ を代数体とし，S を K の有限素点の集合とする．このとき，1 節で述べたのと同様の定理が成り立つ．

(1) 代数体 $K\subset\mathbb{C}$ に対し，次数付き環 $\mathcal{H}(K)=\bigoplus_{i=0}^{\infty}\mathcal{H}_i(K)$ が存在する．(K 上の混合テイトモチーフの周期の環)
(2) 次数付き環 $\mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S})=\bigoplus_{i=0}^{\infty}\mathcal{H}_i(\mathcal{O}_{K,S})$ が存在する．($\mathcal{O}_{K,S}$ 上の混合テイトモチーフの周期の環)
(3) 環準同型 $\mathrm{per}:\mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S})\to\mathbb{C}$ が存在する．
(4) 特別な元 $\mu\in\mathcal{H}_1(\mathcal{O}_{K,S})$ であって $\mathrm{per}(\mu)=2\pi\sqrt{-1}$ となるものが存在する．$\mathcal{A}(\mathcal{O}_{K,S})=\mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S})/(\mu)$ と置く．
(5) 余積 $\Delta:\mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S})\to\mathcal{A}(\mathcal{O}_{K,S})\otimes\mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S})$ が存在する．
(6) 非標準的な同型

$$\mathcal{A}_n(\mathcal{O}_{K,S})\simeq\bigoplus_{\substack{0\leq d\\ n_1+\cdots+n_d=n}}\bigotimes_{j=1}^{d}\left(K_{2n_j-1}(\mathcal{O}_{K,S})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\right)$$

が存在する．
(7) $n\geq 0$, $a_0,\dots,a_{n+1}\in K$ に対して

$$I^{\mathfrak{m}}_{\gamma}(a_0,\dots,a_{n+1})\in\mathcal{H}(K)$$

が定まり，$\mathrm{per}(I^{\mathfrak{m}}_{\gamma}(a_0,\dots,a_{n+1}))=I_{\gamma}(a_0,\dots,a_{n+1})$．$\{a_0,\dots,a_{n+1},\infty\}\subset X$ となるとき，これは $\mathbb{P}^1\setminus X$ 上の反復積分と呼ばれる．
(8) 更に $a_i-a_j\in\mathcal{O}_{K,S}^{\times}$ が任意の $i\neq j$ に対して成立するとき

$$I(a_0,\dots,a_{n+1})\in\mathcal{H}(\mathcal{O}_{K,S}).$$

(9) Goncharov-Brown の余積公式も成立する．

(7) は反復積分が混合テイトモチーフの周期となることを主張しているが，逆は非常に難しい問題である．

予想 1 (Goncharov)**.** $K\subset\mathbb{C}$ を代数体とする．$\mathcal{H}(K)$ の任意の元は，$\mathbb{P}^1\setminus(K\cup\{\infty\})$ 上の反復積分の $\mathbb{Q}$-線形和だろう．

この予想は，$K=\mathbb{Q}$ の場合ですら未解決である．
Brown の定理からは次が従う．

定理 10 (Brown)**.** $\mathcal{H}(\mathbb{Z})$ の任意の元は $\mathbb{P}^1\setminus(\{0,1,\infty\})$ 上の反復積分の $\mathbb{Q}$-線形和である．

Brown の定理と同じタイプの定理としては次が知られている．

定理 11 (Deligne)**.** $N \in \{2,3,4,6,8\}$ とする．μ_N を 1 の N 乗根の集合とする．$\mathcal{H}(\mathbb{Z}[\zeta_N, \frac{1}{N}])$ の任意の元は $\mathbb{P}^1 \setminus (\{0,\infty,\mu_N\})$ 上の反復積分の $\mathbb{Q}$-線形和である．

(広瀬稔 (Minoru Hirose)) FACULTY OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY
E-mail address: `m-hirose@math.kyushu-u.ac.jp`