KZ 方程式と KZ 結合子

名古屋大学　多元数理科学研究科 原田遼太郎

平成 30 年 9 月 11 日

1　準備

1.1　記号

R を単位元を持つ可換環, e_0, e_1 を変数として, 以下の記号をおく.

$R\langle e_0, e_1\rangle$: R を係数にもつ二変数非可換多項式環

$R\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$: R を係数にもつ二変数非可換形式的べき級数環

$\{e_0, e_1\}^\times$: e_0, e_1 がなす語 ($\mathbb{Q}\langle e_0, e_1\rangle$ におけるモニック単項式) の集合であり, 空語を 1 と定義する.

$\mathbb{C}'$: $\mathbb{C}$ から二つの実半直線 $(-\infty, 0]$ と $[1, +\infty)$ を引いた領域

$\sqcup\!\sqcup$: $\mathbb{C}\langle e_0, e_1\rangle$ におけるシャッフル積

Proposition 1.1. 任意の $w \in \{e_0, e_1\}^\times$ に対し, 次を満たす $w_{ij} \in \mathbb{Q} + e_1\mathbb{Q}\langle e_0, e_1\rangle e_0$ $(0 \le i \le r, 0 \le j \le s)$ たちが一意に存在する.

$$w = w_{00} + e_0 \sqcup\!\sqcup\, w_{10} + w_{01} \sqcup\!\sqcup\, e_1 + e_0 \sqcup\!\sqcup\, w_{11} \sqcup\!\sqcup\, e_1 + \cdots e_0^r \sqcup\!\sqcup\, w_{rs} \sqcup\!\sqcup\, e_1^s$$

ここでは $r = \deg_{e_0} w, s = \deg_{e_1} w$ としている.

Example 1.2. $w = e_1e_0e_0e_1$ は次のように表せる.

$$e_1e_0e_0e_1 = -2e_1^2e_0^2 - e_1e_0e_1e_0 + e_1e_0^2 \sqcup\!\sqcup\, e_1$$

1.2 多重ゼータ値

初めに定義した語の中でも, e_1 から始まり e_0 で終わるような語については その指数と多重ゼータ値の指数の対応が考えられる. すなわち, $w \in e_1 \cdot \{e_0, e_1\}^\times \cdot e_0 := \{e_1 w e_0 | w \in \{e_0, e_1\}^\times\}$ が

$$w = e_1 e_0^{k_1 - 1} e_1 e_0^{k_2 - 1} \cdots e_1 e_0^{k_r - 1} \quad (k_i \in \mathbb{N}, k_r \geq 2)$$

と表せ, このとき $\zeta(w) := \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ と定める.

Proposition 1.3. 次の $\mathbb{Q}$-線形写像はシャッフル積に関して準同型である.

$$\begin{aligned} \zeta^{ш} : \mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto \zeta(w_{00}) \end{aligned}$$

即ち, $\zeta^{ш}(w \sqcup\!\sqcup\, w') = \zeta^{ш}(w)\zeta^{ш}(w')$ (記号は Proposition 1.1 と同じものを用いている.)

2 KZ 方程式と KZ 結合子

2.1 KZ 方程式

まず, KZ 結合子の定義のための準備として KZ 方程式の定義を紹介する.

Definition 2.1. $R_U\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ は, $\mathbb{C}'$ の開集合 U 上正則な関数のなす環を係数にもつ変数 e_0, e_1 の非可換形式的べき級数環と定義する. その元 $G(e_0, e_1)(z)$ を次のように表す.

$$G(e_0, e_1)(z) = \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} G_w(z) w \in R_{\mathbb{C}'}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$$

以降, e_0, e_1 の並びを変えない限り $G(e_0, e_1)(z) = G(z)$ と略記する.

Definition 2.2. 次の微分方程式によって, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0, 1, \infty\}$ 上の形式的 **KZ 方程式 (Knizhnik-Zamolodchikov equation)** が定義される.

$$\frac{d}{dz} G(z) = \left(\frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z - 1} \right) G(z).$$

ここで, $G(z) \in R_{\mathbb{C}'}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ である.

以降, 便宜上, KZ 方程式の解の集合を SolKZ とおく.

Lemma 2.3 ([2])**.** $G_0(z) \approx z^{e_0} := \sum_{n\geq 0} \frac{(\log z)^n}{n!} e_0^n$ $(z \to 0)$ を満たすような $G_0(z) = G_0(e_0, e_1)(z) \in \mathrm{Sol}KZ$ が一意に存在する. ここで, $G(z) \approx z^{e_0}$ $(z \to 0)$ とは, ある $P_0(z) \in R_{\mathbb{C}' \cap D_\epsilon}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ (D_ϵ は $z = 0$ の ϵ 近傍) が存在して $G(z)z^{-e_0} = 1 + zP_0(z)$ を満たすことと定義する. この $G_0(z)$ を **$z = 0$ における KZ 方程式の基本解**とよぶ.

Proof. 存在性については Theorem 4.4 の明示公式をもって証明とする. ここでは一意性についてのみ証明する. 今 $H(z), G_0(z) \in \mathrm{Sol}KZ$ を KZ 方程式の基本解とすると, 次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dz}\left(G_0(z)^{-1}H(z)\right) = -G_0(z)^{-1}\left\{\frac{d}{dz}G_0(z)\right\}G_0(z)^{-1}H(z) + G_0(z)^{-1}\frac{d}{dz}H(z) \\
&= -G_0(z)^{-1}\left\{\frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1}\right\}H(z) + G_0(z)^{-1}\left\{\frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1}\right\}H(z) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

よって, $G_0(z)^{-1}H(z) \in \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ となることが分かる. ここで仮定より, ある $P_0(z), P_H(z) \in R_{\mathbb{C}' \cap D_\epsilon}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ で $P_0(0) = 1, P_H(0) = 1$ を満たすものが存在して, 次の等式を満たす.

$$
G_0(z) = 1 + zP_0(z)z^{e_0}, \quad H(z) = 1 + zP_H(z)z^{e_0}.
$$

したがって, $z \to 0$ で $P_0(z) \to 1$, $P_H(z) \to 1$ により,

$$
G_0(z)^{-1}H(z) = \left(1 + zP_0(z)z^{e_0}\right)^{-1}\left(1 + zP_H(z)z^{e_0}\right) \to 1 \ (z \to 0)
$$

が成り立つ. $G_0(z)^{-1}H(z)$ は z に非依存なので結局 $G_0(z)^{-1}H(z) = 1$. □

Lemma 2.4. ([2]) $G_1(z) \approx (1-z)^{e_1}$ $(z \to 1)$ を満たすような $G_1(z) = G_1(e_0, e_1)(z) \in \mathrm{Sol}KZ$ が一意に存在する. ここで, $G(z) \approx (1-z)^{e_1}$ $(z \to 1)$ とは, ある $P_1(z) \in R_{\mathbb{C}' \cap D_\epsilon}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ (D_ϵ は $z = 0$ の ϵ 近傍) が存在して $G(z)(1-z)^{-e_1} = 1 + (1-z)P_1(1-z)$ を満たすことと定義する. この $G_1(z)$ を **$z = 1$ における KZ 方程式の基本解**とよぶ.

Proof. 存在性は Proposition 2.5 と明示公式によって証明とする. 一意性については $G_0(z)$ と同様にして証明される. □

Proposition 2.5. 二つの基本解の間に次の等式が成り立つ;

$$G_1(e_0, e_1)(z) = G_0(e_1, e_0)(1-z).$$

Proof. 基本解の一意性から, 次の二つが成り立つことを確かめれば十分である.

$$G_0(e_1, e_0)(1-z) \approx (1-z)^{e_1} \ (z \to 1), \tag{2.1}$$
$$G_0(e_1, e_0)(1-z) \in \mathrm{Sol}KZ. \tag{2.2}$$

(2.1) から示す. $G_0(z) \approx z^{e_0}$ $(z \to 0)$ により, 次が得られる.

$$G_0(e_1, e_0)(1-z) \approx (1-z)^{e_1} \ (z \to 1).$$

(2.2) については, まず KZ 方程式を $z \to 1-z$ と変数変換すると,

$$\frac{d}{dz}G(1-z) = \left(\frac{e_1}{z} + \frac{e_0}{z-1}\right)G(1-z).$$

元の KZ 方程式と比較して右辺の e_0, e_1 の順番が入れ替わっていることと, $G_0(e_0, e_1)(z)$ は元の KZ 方程式の解であることから,

$$G_0(e_1, e_0)(1-z) \in \mathrm{Sol}KZ.$$

したがって題意が示された. □

2.2 KZ 結合子

Theorem 4.4 により $G_0(z), G_1(z)$ は定数項 1 をもつべき級数なので逆元を持つ. このことから, KZ 結合子 (Drinfeld 結合子とも呼ばれる)Φ_{KZ} は次のように定義される.

Definition 2.6. ([3]) **KZ 結合子 (KZ associator)** $\Phi_{KZ}(e_0, e_1)$ は次の式で定義される.

$$\Phi_{KZ}(e_0, e_1) := G_1(e_0, e_1)(z)^{-1}G_0(e_0, e_1)(z) \in R_{\mathbb{C}'}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$$

以降, e_0, e_1 の並びが問題にならない限り, $\Phi_{KZ}(e_0, e_1)$ を Φ_{KZ} と略す.

Lemma 2.7. Φ_{KZ} は z に依らない. 即ち,

$$\Phi_{KZ} \in \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$$

Proof. 次の計算より示される.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\Phi_{KZ} &= -G_1(z)^{-1}\Big(\frac{d}{dz}G_1(z)\Big)G_1(z)^{-1}G_0(z) + G_1(z)^{-1}\frac{d}{dz}G_0(z) \\
&= -G_1(z)^{-1}\Big(\frac{e_0}{z}+\frac{e_1}{z-1}\Big)G_1(z)G_1(z)^{-1}G_0(z) \\
&\quad + G_1(z)^{-1}\Big(\frac{e_0}{z}+\frac{e_1}{z-1}\Big)G_0(z) \\
&= -G_1(z)^{-1}\Big(\frac{e_0}{z}+\frac{e_1}{z-1}\Big)G_0(z) + G_1(z)^{-1}\Big(\frac{e_0}{z}+\frac{e_1}{z-1}\Big)G_0(z) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

□

Remark 2.8. Proposition 1.3 を用いることにより, [5] と [11] に表れる明示公式を次のようにも書ける.

$$\Phi_{KZ} = \sum_{w\in\{e_0,e_1\}^\times} (-1)^{\deg_{e_1} w}\zeta^{\sqcup\!\sqcup}(\overleftarrow{w})w$$

ただし, $\overleftarrow{w}$ は語 w に表れる e_0, e_1 達の並びを右から左に並べ替えた語としている.

3 結合子関係式

最後に KZ 結合子が満たす関係式について紹介する. この章ではまず初めに Definition 3.1 で結合子 $(\mu,\phi)\in K^\times\times K\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ を定義し, その中で結合子関係式を述べる. そして次に, Definition 2.6 では Φ_{KZ} を基本解の比として定義し KZ 結合子 (Drinfeld 結合子) と呼んでいたがこの章ではより厳密に Definition 3.1 に照らし合わせ, 実は組 $(2\pi i, \Phi_{KZ})$ が結合子の例であることを示す. ただし, 証明は 3-サイクル関係式まで行う. また, 多重ゼータ値の関係式, Euler の公式との関係も紹介する.

下の Definititon 3.1 中の $\widehat{U\mathfrak{P}_5}$ は, $\mathfrak{P}_5$ の普遍包絡環を次数について完備化したものとしている. $\mathfrak{P}_5$ とは **5 本糸純球面組紐 Lie 代数**とよばれる, 次の関係式を満たすような元 X_{ij} $(1\le i,j\le 5)$ で生成される体 K 上の次数付き Llie 代数である. 次数は $\deg(X_{ij})=1$ として定めている.

$$\cdot\, X_{ii}=0, \quad \cdot\, X_{ij}=X_{ji}\ (i\neq j), \quad \cdot\sum_{j=1}^{5}X_{ij}=0\ (1\le i\le 5),$$

$$\cdot\, [X_{ij},X_{kl}]=0\ (i,j,k,l\ は相異なる).$$

Definition 3.1. K を標数 0 の体とする．$(\mu, \phi) \in K^{\times} \times K\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$ が次の条件を満たすとき**結合子**をなすという[1].

$$\cdot\ \phi(e_0, 0) = \phi(0, e_1) = 1. \tag{3.1}$$

$$\cdot\ \Delta(\phi) = \phi \otimes \phi. \tag{3.2}$$

· (2-サイクル関係式):　$K\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$ において,

$$\phi(e_0, e_1)\phi(e_1, e_0) = 1. \tag{3.3}$$

· (3-サイクル関係式):　$K\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$ で $e_\infty = -e_0 - e_1$ とおくと,

$$\exp(\frac{\mu}{2}e_0)\phi(e_\infty, e_0)\exp(\frac{\mu}{2}e_\infty)\phi(e_1, e_\infty)\exp(\frac{\mu}{2}e_1)\phi(e_0, e_1) = 1. \tag{3.4}$$

· (5-サイクル関係式):　$\widehat{U\mathfrak{P}_5}$ において,

$$\phi(X_{12}, X_{23})\phi(X_{34}, X_{45})\phi(X_{51}, X_{12})\phi(X_{23}, X_{34})\phi(X_{45}, X_{51}) = 1. \tag{3.5}$$

ここで, Δ とは $\Delta(e_0) = e_0 \otimes 1 + 1 \otimes e_0$, $\Delta(e_1) = e_1 \otimes 1 + 1 \otimes e_1$ で定まる, 通常の積についての K-代数準同型 $\Delta : K\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle \longrightarrow K\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle \widehat{\otimes} K\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$ としている．$\widehat{\otimes}$ は完備テンソル積を意味する．また (3.1) から (3.5) までの五つの関係式を合わせて**結合子関係式**とよぶ.

Theorem 3.2 ([3])**.** $(2\pi i, \Phi_{KZ})$ は結合子である.

Proof. $2\pi i \in \mathbb{C}^{\times}$ は明らか．(3.1) も Theorem4.10 により Φ_{KZ} が満たすことがわかる．まず初めに関係式 (3.2) について証明する．$w \in \{e_0, e_1\}^{\times}$ に対し,

$$\Delta(w) = \sum_{w_1, w_2 \in \{e_0, e_1\}^{\times}} \delta_{w_1 ш w_2, w} w_1 \otimes w_2$$

が成り立つ．ここで, $\delta_{w_1 ш w_2, w}$ は通常の Kronecker のデルタを $\mathbb{Q}$-線形に拡張したものとしている．即ち, $w_1 ш w_2$ 中における w の係数である．上式より,

$$\begin{aligned}
\Delta(\Phi_{KZ}) &= \sum_{w_1, w_2 \in \{e_0, e_1\}^{\times}} (-1)^{\deg_{e_1} w} \zeta^{ш}(\overleftarrow{w})\Delta(w) \\
&= \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^{\times}} (-1)^{\deg_{e_1} w} \zeta^{ш}(\overleftarrow{w}) \sum_{w_1, w_2 \in \{e_0, e_1\}^{\times}} \delta_{w_1 ш w_2, w} w_1 \otimes w_2 \\
&= \sum_{w_1, w_2 \in \{e_0, e_1\}^{\times}} \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^{\times}} (-1)^{\deg_{e_1} w} \delta_{w_1 ш w_2, w} \zeta^{ш}(\overleftarrow{w}) w_1 \otimes w_2.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

[1] μ は K の可逆元全体の集合 $K^{\times}$ の元としていることに注意.

$w_1 ⧢ w_2$ の各項において, e_1 の次数は $\deg_{e_1} w_1 + \deg_{e_1} w_2$ に等しいので,

$$(3.6)\text{ の最右辺} = \sum_{w_1, w_2 \in \{e_0, e_1\}^\times} (-1)^{\deg_{e_1} w_1 + \deg_{e_1} w_2} \zeta^{⧢}(\overleftarrow{w_1 ⧢ w_2}) w_1 \otimes w_2.$$

Proposition 1.3 により,

$$\begin{aligned}(3.6)\text{ の最右辺} &= \sum_{w_1, w_2 \in \{e_0, e_1\}^\times} (-1)^{\deg_{e_1} w_1 + \deg_{e_1} w_2} \zeta^{⧢}(\overleftarrow{w_1}) \zeta^{⧢}(\overleftarrow{w_2}) w_1 \otimes w_2 \\ &= \Phi_{KZ} \otimes \Phi_{KZ}.\end{aligned}$$

次に関係式 (3.3) を証明する. Definition 2.6 と Proposition 2.5 から,

$$\begin{aligned}\Phi_{KZ}(e_1, e_0) &= G_1(e_1, e_0)(z)^{-1} G_0(e_1, e_0)(z) \\ &= G_0(e_0, e_1)(1-z)^{-1} G_1(e_0, e_1)(1-z) \\ &= \Phi_{KZ}(e_0, e_1)^{-1}.\end{aligned}$$

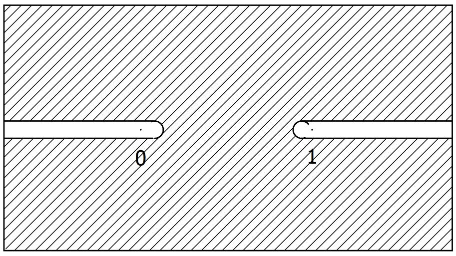
よって

$$\Phi_{KZ}(e_0, e_1)\Phi_{KZ}(e_1, e_0) = 1.$$

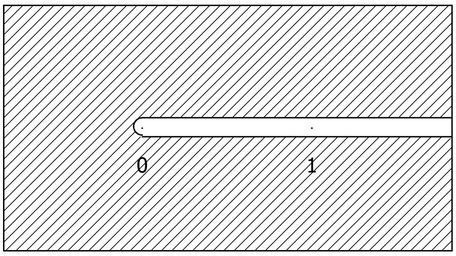
次に関係式 (3.4) を示す. 三点 $\{0, 1, \infty\}$ の各入れ替えに対して射影変換が一意に定まる. それらがなす自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \backslash \{0, 1, \infty\})$ により, 領域 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \backslash \{0, 1, \infty\}$ と形式的 KZ 方程式が移り変わる. まず, $\{0, 1, \infty\}$ を入れ替えない自明な射影変換に対しては領域は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \backslash \{0, 1, \infty\}$, 形式的 KZ 方程式も §1.2.1 と同様であるから, その基本解は $G_0(e_0, e_1)(z)$ である. 則ち,

$$\begin{aligned}\mathrm{id} : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ 0 &\longmapsto 0 \\ 1 &\longmapsto 1 \\ \infty &\longmapsto \infty \\ &G_0(e_0, e_1)(z).\end{aligned}$$

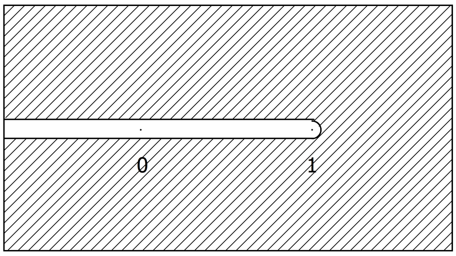
その他の射影変換については次ページで見るように図の領域とその領域上の形式的 KZ 方程式の解が得られる.



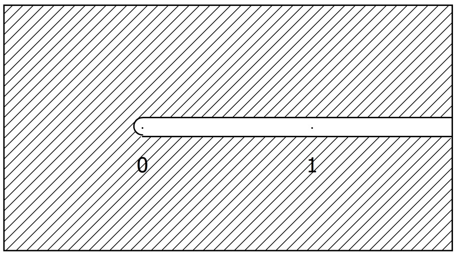
$$0 \longmapsto 1$$
$$1 \longmapsto 0$$
$$\infty \longmapsto \infty$$
$$G_0(e_1, e_0)(1 - z)$$



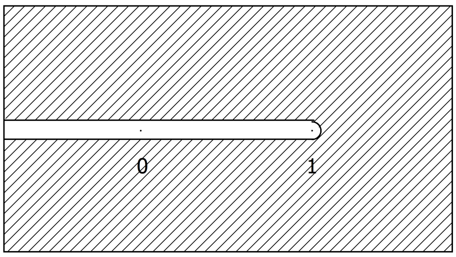
$$0 \longmapsto 0$$
$$1 \longmapsto \infty$$
$$\infty \longmapsto 1$$
$$G_0(e_0, e_\infty)\left(\frac{z}{z-1}\right)$$



$$0 \longmapsto \infty$$
$$1 \longmapsto 1$$
$$\infty \longmapsto 0$$
$$G_0(e_\infty, e_1)\left(\frac{1}{z}\right)$$



$$0 \longmapsto 1$$
$$1 \longmapsto \infty$$
$$\infty \longmapsto 0$$
$$G_0(e_\infty, e_0)\left(\frac{1}{1-z}\right)$$



$$0 \longmapsto \infty$$
$$1 \longmapsto 0$$
$$\infty \longmapsto 1$$
$$G_0(e_1, e_\infty)\left(\frac{z-1}{z}\right)$$

また, 次の 6 つの漸近挙動が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&G_0(e_0, e_1)(z) \approx z^{e_0} \quad (z \to 0), \\
&G_0(e_1, e_0)(1-z) \approx (1-z)^{e_1} \quad (z \to 1), \\
&G_0(e_1, e_\infty)\Big(1 - \frac{1}{z}\Big) \approx \Big(1 - \frac{1}{z}\Big)^{e_1} \quad (z \to 1), \\
&G_0(e_\infty, e_1)\Big(\frac{1}{z}\Big) \approx \Big(\frac{1}{z}\Big)^{e_\infty} \quad (z \to \infty), \\
&G_0(e_\infty, e_0)\Big(\frac{1}{1-z}\Big) \approx \Big(\frac{1}{1-z}\Big)^{e_\infty} \quad (z \to \infty), \\
&G_0(e_0, e_\infty)\Big(\frac{z}{z-1}\Big) \approx \Big(\frac{z}{z-1}\Big)^{e_0} \quad (z \to 0).
\end{aligned}
$$

これら解の間に以下の五つの関係式が成り立つ.

$$G_0(e_0, e_1)(z)\exp(\pi i e_0) = G_0(e_0, e_\infty)\Big(\frac{z}{z-1}\Big), \tag{3.7}$$

$$G_0(e_0, e_\infty)\Big(\frac{z}{z-1}\Big)\Phi_{KZ}(e_\infty, e_0) = G_0(e_\infty, e_0)\Big(\frac{1}{1-z}\Big), \tag{3.8}$$

$$G_0(e_\infty, e_0)\Big(\frac{1}{1-z}\Big)\exp(\pi i e_\infty) = G_0(e_\infty, e_1)\Big(\frac{1}{z}\Big), \tag{3.9}$$

$$G_0(e_\infty, e_1)\Big(\frac{1}{z}\Big)\Phi_{KZ}(e_1, e_\infty) = G_0(e_1, e_\infty)\Big(1 - \frac{1}{z}\Big), \tag{3.10}$$

$$G_0(e_1, e_\infty)\Big(1 - \frac{1}{z}\Big)\exp(\pi i e_1) = G_0(e_1, e_0)(1-z). \tag{3.11}$$

これらの式から

$$
\begin{aligned}
G_0(e_0, e_1)(z)\exp(\pi i e_0)\Phi_{KZ}(e_\infty, e_0)\exp(\pi i e_\infty)\Phi(e_1, e_\infty)& \\
\exp(\pi i e_1) = G_0(e_1, e_0)(1-z)&.
\end{aligned}
$$

よって, Proposition 2.5 を用いることにより次の式が得られる.

$$\exp(\pi i e_0)\Phi_{KZ}(e_\infty, e_0)\exp(\pi i e_\infty)\Phi_{KZ}(e_1, e_\infty)\exp(\pi i e_1)\Phi_{KZ}(e_0, e_1) = 1.$$

したがって, 関係式 (3.7), . . . , (3.11) を導けばよい. まず (3.10) を証明する. 漸近挙動により以下が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
G_0(e_\infty, e_0)\Big(\frac{1}{1-z}\Big)\exp(\pi i e_\infty) &\approx \Big(\frac{1}{1-z}\Big)^{e_\infty}\exp(\pi i e_\infty) \quad (z \to \infty) \\
&= \exp\Big(e_\infty\Big(\log\frac{1}{1-z} + \pi i\Big)\Big) \\
&= \exp\Big(e_\infty \log\frac{1}{z-1}\Big) \\
&\approx \exp\Big(e_\infty \log\frac{1}{z}\Big) \quad (z \to \infty).
\end{aligned}
$$

ゆえに, 基本解の一意性から (3.9) が得られ, (3.7), (3.11) も同様にして示される. 次に (3.8) の証明に移る. $G_0(e_0, e_\infty)\left(\frac{z}{z-1}\right)$ に対して Proposition 2.5 を用いることで次の式を得る.

$$G_0(e_0, e_\infty)\left(\frac{z}{z-1}\right) = G_1(e_\infty, e_0)\left(\frac{1}{1-z}\right)\Phi_{KZ}(e_\infty, e_0)$$

よって, 右辺において $\Phi_{KZ}(e_\infty, e_0)$ の定義を用いることで (3.8) が示される. (3.10) も同様にして得られるため, 以上より (3.7), . . . , (3.11) が示された.

5-サイクル関係式, (3.5) についての証明は省略する. □

Remark 3.3. KZ 結合子における結合子関係式から以下の多重ゼータ値の関係式が従う. 上から二番目の関係については証明が気になる人は [9] の Lemma 2.2. を参照されたい.

(3.2) と $\Phi_{KZ}(0,0) = 1 \Longleftrightarrow$ シャッフル関係式

(3.2) と (3.3)$\Longrightarrow$ 双対関係式

(3.2) と (3.5)$\underset{[7]}{\Longrightarrow}$ (3.3) と (3.4)

結合子関係式 $\underset{[8]}{\Longrightarrow}$ 一般複シャッフル関係式

一方で, Euler の公式が従うことも知られている.

Proposition 3.4 ([1])**.** KZ 結合子における (3.2), (3.3), (3.4) から

$$\zeta(2n) = -\frac{1}{2}\frac{(2\pi i)^{2n}}{2n!}B_{2n}$$

が導かれる. (但し, B_{2n} は Bernoulli 数, $n \geq 1$ とする.)

4 補足資料

この章では, 講演で説明しなかった, 基本解 $G_0(z)$ 及び Φ_{KZ} の明示公式について大まかな証明を述べる. 注意すべきこととして, [6, 10] を参考としているため多重ゼータ値と語の指数対応が講演中のもの (§1.2) と逆になっている. しかし, 講演で用いた対応についても同様の手法により証明される.

4.1　基本解の明示公式

$G_0(z)$ の明示公式を紹介するために, 新しい記号と言葉を定義する.

Notation 4.1. $w \in \{e_0, e_1\}^{\times}$ を $p_i, q_i \geq 1$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ に対し

$$w = {e_1}^{q_0}{e_0}^{p_0}{e_1}^{q_1}\cdots{e_1}^{q_n}{e_0}^{p_n}$$

と表したとき, w の重さ (weight) を

$$\mathrm{wt}(w) := q_0 + p_0 + \cdots + q_n + p_n$$

w の深さ (depth) を

$$\mathrm{dep}(w) := q_0 + q_1 + \cdots + q_n$$

と定義する.

Notation 4.2.

$$M' := \mathbb{C}\langle e_0, e_1\rangle \cdot e_1$$

とおいたときに次の自然な射影を f' とする.

$$f' : \mathbb{C}\langle e_0, e_1\rangle \twoheadrightarrow \mathbb{C}\langle e_0, e_1\rangle / M' \simeq \mathbb{C}\cdot 1 + M.'$$

また, $z \in \mathbb{C}$ とし,

$$M' \ni w = e_0^{k_m-1}e_1e_0^{k_{m-1}-1}e_1\cdots e_0^{k_1-1}e_1$$
$$(m \geq 1, k_1 \geq 1, k_2 \geq 1, \ldots, k_m \geq 1\ ).$$

及び空語 1 に対して, 次の $\mathbb{C}$-線形写像を定義する.

$$\begin{aligned} Li(z) : M' &\longrightarrow \mathbb{C} \\ w &\longmapsto Li_w(z) := Li_{(k_1,k_2,\cdots,k_m)}(z) \\ 1 &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

Notation 4.3. α を新たな変数とおき, g_1' を次の $\mathbb{C}$-代数準同型とする.

$$\begin{aligned} g_1' : \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle &\longrightarrow \mathbb{C}\,\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle\,\hat{\otimes}\mathbb{C}[\![\alpha]\!] \\ e_0 &\longmapsto e_0 - \alpha \\ e_1 &\longmapsto e_1 \end{aligned}$$

さらに $w \in \mathbb{C}\langle e_0, e_1\rangle$ を語としたとき, g_2' を次の $\mathbb{C}$-線形写像とする.

$$
\begin{aligned}
g_2' : \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle \hat{\otimes} \mathbb{C}[\![\alpha]\!] &\longrightarrow \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle \\
w \otimes \alpha^p &\longmapsto w e_0^p \\
e_1 &\longmapsto e_1
\end{aligned}
$$

これらを用いて, 明示公式の定理が記される.

Theorem 4.4 ($G_0(z)$ の明示公式 [6])**.** $G_0(z) = G_0(e_0, e_1)(z)$ を KZ 方程式の基本解とすると, 次のように表される.

$$
G_0(e_0, e_1)(z) = \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} J(w)(z) w
$$

但し, $J(w)(z)$ は以下の場合分けに応じて表される.

(1) $w \in M'$ のとき,

$$
J(w)(z) = (-1)^{\mathrm{dep}(w)} Li_w(z).
$$

(2) $w = v e_0^r$ $(r \geq 1, v \in M')$ のとき,

$$
J(w)(z) = (-1)^{\mathrm{dep}(w)} \sum_{\substack{0 \leq s, t \\ s+t=r}} (-1)^s Li_{f'(v \sqcup\!\sqcup e_0^s)}(z) \frac{\{\log(z)\}^t}{t!}.
$$

(3) $w = e_0^r$ $(r \geq 0)$ のとき,

$$
J(w)(z) = \frac{\{\log(z)\}^r}{r!}.
$$

Proof. まず (1) を示す. KZ 方程式より,

$$
\sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} \left(\frac{d}{dz} J(w)(z) \right) = \left(\frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1} \right) \left(\sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} J(w)(z) w \right)
$$

$w = e_0 w' \quad (w \in M')$ とする. 上式において

$$
\frac{d}{dz} J(e_0 w')(z) e_0 w' \quad \text{と} \quad \frac{e_0}{z} J(w')(z) w'
$$

の係数を比較することで,

$$\frac{d}{dz}J(e_0w')(z)=\frac{1}{z}J(w')(z) \tag{4.1}$$

$w=e_1w'$ のときも同様に,

$$\frac{d}{dz}J(e_1w')(z)=\frac{1}{z-1}J(w')(z) \tag{4.2}$$

を得る. $(-1)^{\mathrm{dep}(w)}Li_w(z) \quad (w \in M')$ らは多重ポリログの微分関係式より, 微分方程式 (4.1), (4.2) を満たす. よって $w\in M'$ に対して

$$(-1)^{\mathrm{dep}(w)}Li_w(z)=J(w)(z).$$

(2), (3) の証明に移る. 次の $\mathbb{Q}$ 双線形写像を定める.

$$< \quad >: \mathbb{Q}\langle e_0,e_1\rangle \times \mathbb{Q}\langle e_0,e_1\rangle \longrightarrow \mathbb{Q}\langle e_0,e_1\rangle$$

ただし, 各語 $w_1,w_2\in\{e_0,e_1\}^\times$ に対し,

$$<w_1,w_2>:=\begin{cases} 1 & \text{if } w_1=w_2, \\ 0 & \text{if } w_1\neq w_2. \end{cases}$$

ここで, $<g_1'\circ g_2'(w_1),w_2e_0^r>=<w_1,(-1)^rf'(w_2\sqcup e_0^r)>$ が成り立つ. 実際, $w_1\in M'$ の場合, $<w_1,(-1)^rf'(w_2\sqcup e_0^r)>=(-1)^rn$ であったとすると $w_2\sqcup e_0^r$ は項として nw_1 をもつ. 則ち, w_1 から e_0 を r 個除いて w_2 を得る方法は n 通りある. 一方で, $w_1=e_0^{s_1}e_1\cdots e_0^{s_m}e_1$ と表せたとして

$$g_1'(w_1)=(e_0-\alpha)^{s_1}e_1\cdots(e_0-\alpha)^{s_m}e_1$$

$g_1'(w_1)$ において $(-1)^rw_2\otimes\alpha^r$ が n 個含まれる. 則ち $g_2'\circ g_1'(w_1)$ は $(-1)^rw_2e_0^r$ を n 個含む. よって,

$$<g_2'\circ g_1'(w_1),w_2e_0^r>=(-1)^rn=<w_1,(-1)^rf'(w_2\sqcup e_0^r)>.$$

$w_1\notin M'$ の場合も明らかに $<g_2'\circ g_1'(w_1),w_2e_0^r>=<w_1,(-1)^rf'(w_2\sqcup e_0^r)>$ が成り立つ. 次に下の等式を示す.

$$g_2'\circ g_1'(f'(G_0(z)))=\sum_{w\in\{e_0,e_1\}^\times}J'(w)(z)w$$

$$J'(w)(z) = \begin{cases} (-1)^{\mathrm{dep} w} Li_w(z) & \text{if } w \in M' \quad (4.3) \\ (-1)^{\mathrm{dep} w + r} Li_{f'(w' \sqcup e_0^r)}(z) & \text{if } w = w' e_0^r \ (w' \in M') \quad (4.4) \\ 0 & \text{if } w = e_0^r \quad (r \geq 1) \quad (4.5) \end{cases}$$

(1) より, $w \in M'$ に対して $J(w)(z) = (-1)^{\mathrm{dep} w} Li_w(z)$. よって, $f'(G_0(z)) = \sum_{w \in M'} (-1)^{\mathrm{dep} w} Li_w(z) w$ なので,

$$g_2' \circ g_1'(f'(G_0(z))) = \sum_{w \in M'} (-1)^{\mathrm{dep} w} Li_w(z) + \sum_{w \notin M'} (\text{other terms}).$$

よって $w \in M'$ に対して $J'(w)(z) = (-1)^{\mathrm{dep} w} Li_w(z)$. 一方で, $f'(G_0(z))$ の各項は M' に属しているので, $g_2' \circ g_1'(f'(G_0(z)))$ は $\mathbb{C} \cdot e_0^r$ に属する項をもたない. したがって $w = e_0^r \quad (r \geq 1)$ に対し,

$$J'(w)(z) = 0.$$

よって (4.5) が示された. $g_2' \circ g_1'(G_0(z)) = G_0(z) \cdot z^{-e_0}$ より,

$$G_0(z) = \left(\sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} J'(w)(z) w \right) \left(\sum_{n \geq 0} \frac{(\log z)^n}{n!} e_0^n \right) \tag{4.6}$$

ここで, $w' e_0^r$ $(r \geq 1, w' \in M', \text{語})$ とし,

$$(-1)^r f'(w' \sqcup e_0^r) = (-1)^r \sum_{\substack{\mathrm{dep} w_i = \mathrm{dep} w' \\ n_i \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ w_i \in M', \text{語}}} n_i w_i$$

と表せたとする. このとき,

$$J((-1)^r f'(w' \sqcup e_0^r))(z) = (-1)^r \sum_{\substack{\mathrm{dep} w_i = \mathrm{dep} w' \\ n_i \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ w_i \in M', \text{語}}} n_i J(w_i)(z)$$

$$J'(w' e_0^r)(z) = \sum_{\substack{w_i' \in M', \text{語} \\ \mathrm{dep} w_i = \mathrm{dep} w' \\ < g_2' \circ g_1'(f'(w_i'), w' e_0^r) > = m_i \neq 0}} m_i J(w_i')(z)$$

よって, $< g_2' \circ g_1'(w_1), w_2 e_0^r > = < w_1, (-1)^r f'(w_2 \sqcup e_0^r) >$ より,

$$J'(w' e_0^r)(z) = J((-1)^r f'(w' \sqcup e_0^r))(z) = (-1)^r \sum_{\substack{\mathrm{dep} w_i = \mathrm{dep} w' \\ n_i \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ w_i \in M', \text{語}}} n_i (-1)^{\mathrm{dep}(w_i)} Li_{w_i}(z)$$

$$= (-1)^{\mathrm{dep} w' + r} Li_{f'(w' \sqcup e_0^r)}(z)$$

したがって (4.4) が示された. よって (4.6) より, $w = w'e_0^r \quad (r \geq 1,\ w' \in M')$ に対して

$$J(w)(z) = J(w'e_0^r)(z) = \sum_{s+t=r} (-1)^{\mathrm{dep} w+s} Li_{f'(w' ⧢ e_0^s)}(z) \frac{(\log(z))^t}{t!}$$

[6] の Lemma 3.20 より $G_0(z) = g_2' \circ g_1'(f'(G_0(z)))z^{e_0}$. ゆえに

$$G_0(z) = \left(\sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} J'(w)(z)w \right) z^{e_0}. \tag{4.7}$$

この (4.7) と $z^{e_0} = \sum_{n \geq 0} \frac{(\log z)^n}{n!} e_0^n$ より,

$$J(w'e_0^r)(z) = \sum_{\substack{s+t=r \\ s,t \geq 0}} J'(w'e_0^s)(z) \frac{(\log z)^t}{t!}$$

あとは (4.4) を用いることで明示公式の (2) が示される. さらに, 再び (4.7) と $z^{e_0} = \sum_{n \geq 0} \frac{(\log z)^n}{n!} e_0^n$ より

$$J(e_0^r)(z) = \sum_{\substack{s+t=r \\ s,t \geq 0}} J'(e_0^s)(z) \frac{(\log z)^t}{t!}$$

であり, あとは (4.5) により明示公式の (3) が示される. □

Example 4.5. $G_0(z)$ の低次の項は次のように表される.

$$\begin{aligned}
G_0(e_0, e_1)(z) = 1 &+ Li_1(z)e_0 + Li_1(1-z)e_1 + \frac{\{Li_1(z)\}^2}{2} e_0^2 - Li_2(z)e_0e_1 + \\
&+ \{Li_2(z) + (\log z)\log(1-z)\}e_1e_0 + \frac{\{\log(1-z)\}^2}{2} e_1^2 + \frac{(\log z)^3}{6} e_0^3 \\
&- Li_3(z)e_0^2e_1 + \{2Li_3(z) + (\log z)Li_2(z)\}e_0e_1e_0 + Li_{1,2}(z)e_0e_1^2 \\
&- \left[Li_3(z) - (\log z)Li_2(z) - \frac{(\log z)^2 \log(1-z)}{2} \right] e_1e_0^2 + \cdots .
\end{aligned}$$

Theorem 4.4 を用いて $G_0(z), G_1(z)$ を実際に構成できることから, $G_0(z), G_1(z)$ の存在性が示される.

4.2 KZ 結合子の明示公式

Φ_{KZ} に対しても明示公式が存在することがわかっている. 記述するために, いくつかの準備を行う.

Notation 4.6.

$$M := e_0 \cdot \mathbb{C}\langle e_0, e_1\rangle \cdot e_1$$

M に対して次の自然な射影を f とおく.

$$f : \mathbb{C}\langle e_0, e_1\rangle \twoheadrightarrow \mathbb{C}\langle e_0, e_1\rangle/(e_1 \cdot \mathbb{C}\langle e_0, e_1\rangle + \mathbb{C}\langle e_0, e_1\rangle \cdot e_0) \simeq \mathbb{C} \cdot 1 + M.$$

$$\begin{aligned} M \ni w = e_0^{k_m-1}e_1e_0^{k_{m-1}-1}e_1 \cdots e_0^{k_1-1}e_1 \\ (m \geq 1, k_1 \geq 1, k_2 \geq 1, \cdots, k_{m-1} \geq 1, k_m \geq 2\ ). \end{aligned}$$

及び空語 1 に対して, 次の $\mathbb{C}$ 線形写像を定義する.

$$\begin{aligned} Z : M &\longrightarrow \mathbb{C} \\ w &\longmapsto \zeta(k_1, k_2, \cdots, k_m) \\ 1 &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

Notation 4.7. α, β を新たな変数とおき, 以下の二つの写像を定義する.

$$\begin{aligned} g_1 : \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle &\longrightarrow \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle\widehat{\otimes}\mathbb{C}[[\alpha, \beta]] \\ e_0 &\longmapsto e_0 - \alpha \\ e_1 &\longmapsto e_1 - \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2 : \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle\widehat{\otimes}\mathbb{C}[[\alpha, \beta]] &\longrightarrow \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle \\ w \otimes \alpha^p\beta^q &\longmapsto e_1^q w e_0^p \quad (p, q \geq 0) \end{aligned}$$

但し, g_1 は代数射, g_2 は $\mathbb{C}$ 線形写像として定義する.

これらの記号を用いて以下の補題が成り立つ.

Lemma 4.8.

$$g_2 \circ g_1 \circ f(\Phi_{KZ}(e_0, e_1)) = \Phi_{KZ}(e_0, e_1)$$

Proof. [10] の補題 A.22 をみよ. □

Lemma 4.9.

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{-B}G_0(e_0,e_1)(1-\epsilon)=\Phi_{KZ}(e_0,e_1).$$

Proof. [10] の補題 A.20 をみよ. □

Theorem 4.10 (Φ_{KZ} の明示公式 [5, 11])**.**

$$\Phi_{KZ}(e_0,e_1)=\sum_{w\in\{e_0,e_1\}^\times} I(w)w$$

但し, $I(w)$ は次のような場合分けに応じて表される.

(1) $w\in M$ のとき, $I(w)=(-1)^{\mathrm{dep}(w)}Z(w)$.

(2) $w=e_1^r v e_0^s$ $(r,s\geq 0, v\in M)$ のとき,
$I(w)=(-1)^{\mathrm{dep}(w)}\sum_{\substack{0\leq a\leq r\\ 0\leq b\leq s}}(-1)^{a+b}Z(f(e_1^a ш e_1^{r-a}ve_0^{s-b} ш e_0^b))$.

(3) $w=e_1^r e_0^s$ $(r,s\geq 0)$ のとき,
$I(w)=(-1)^{\mathrm{dep}(w)}\sum_{\substack{0\leq a\leq r\\ 0\leq b\leq s}}(-1)^{a+b}Z(f(e_1^a ш e_1^{r-a}e_0^{s-b} ш e_0^b))$.

Proof. まず (1) の証明を行う. Theorem 4.4 の主張 (1) と Lemma 4.9 を組み合わせることで, $I(w)=(-1)^{dep(w)}\zeta(w)$ が示される. (2) および (3) の証明については, Lemma 4.8 を用いることで, Theorem 4.4 の証明と同様にして示される. □

Example 4.11. 上の定理により, Φ_{KZ} の低次の項は次のように表せる.

$$\begin{aligned}\Phi_{KZ}=1&-\zeta(2)e_0e_1+\zeta(2)e_1e_0-\zeta(3)e_0^2e_1+2\zeta(3)e_0e_1e_0+\zeta(1,2)e_0e_1^2\\&-\zeta(3)e_1e_0^2-2\zeta(1,2)e_1e_0e_1+\zeta(1,2)e_1^2e_0-\zeta(4)e_0^3e_1+\cdots.\end{aligned}$$

Remark 4.12. これまで, $G_0(z)$ の明示公式と Φ_{KZ} の明示公式を紹介した. これらの公式と, Proposition 2.5 から得られる式 $G_0(e_1,e_0)(1-z)\Phi_{KZ}(z)=G_0(e_0,e_1)(z)$ により多重ポリログの関数等式が得られる. 例えば次が成り立つ.

$$\begin{aligned}Li_2(1-z)&=Li_2(z)-\log(z)\log(1-z)+\zeta(2),\\ Li_3(1-z)&=-Li_{1,2}(z)+\log(1-z)Li_2(1-z)\\&\quad+\frac{\{\log(1-z)\}^2\log(z)}{2}+\zeta(1,2).\end{aligned}$$

参考文献

[1] P. Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, in Galois groups over $\mathbb{Q}$: proceedings of a workshop held March 23-27, 1987, editor Y. Ihara, K. Ribet, J.-P .Serre. Springer-Verlag, New York, 1989 79–297.

[2] V. G. Drinfeld, *Quasi-Hopf algebras*, Algebra i Analiz, **1** (1989) 114–148. English translation: Leningrad Math. J. **1** (1990) 1419–1457.

[3] V. G. Drinfeld, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with Gal*$(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Leningrad Math. J. **2** (1991) 829–860.

[4] L. Euler, *Meditationes circa singulare serierum genus*, Novi Comm. Acad. Sci. Petropol **20** (1776), 140-186, reprinted in Opera Omnia ser. I, vol. 15, B. G. Teubner, Berlin (1927) 217–267.

[5] H. Furusho, *The Multiple zeta value algebra and the stable derivation algebra*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. vol **39**. no 4. (2003). 695–720.

[6] H. Furusho, *p-adic multiple zeta values I. p-adic multiple polylogarithms and the p-adic KZ equation*, Invent. math. **155**, (2004) 253–286.

[7] H. Furusho, *Pentagon and hexagon equations*, Annals of Mathematics, Vol. 171 (2010), No. 1, 545–556.

[8] H. Furusho, *Double shuffle relation for associators*, Annals of Mathematics, Vol. 174 (2011), No. 1, 341–360.

[9] H. Furusho, *On relations among multiple zeta values obtained in knot theory*, preprint, arXiv:1501.06638, to appear in "Teichmüller theory and its impact".

[10] 古庄英和, 結び目と Grothendieck-Teichmüller 群, 九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所 MI lecture note series Vol **68** (2016).

[11] T. T. Q. Le, and J. Murakami, *Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial*, Nagoya Math. J. **142** (1996) 39–65.