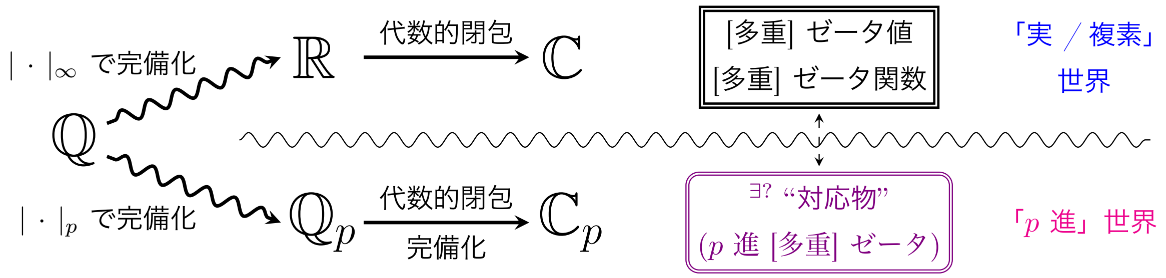
「実 / 複素ゼータの世界」から「p 進ゼータの世界」へ: レジュメ

原 隆 (東京電機大学・未来科学部)[†]

■ 序奏: 「p 進」世界 の “ゼータ” は何故 “難しくて分かりづらい” のでしょう??



⋆ 「実 / 複素」世界 での [多重] ゼータ関数 / ゼータ値とは?

$\overset{\text{“古典的定義”}}{\rightsquigarrow}$ 適切な [多重] ディリクレ級数 [*multiple*] *Dirichlet series*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\quad(\mathrm{Re}\, s\gg 0),\qquad \sum_{0<n_1<n_2<\dots<n_r}\frac{1}{n_1^{s_1}n_2^{s_2}\cdots n_r^{s_r}}\quad(\mathrm{Re}\,{}^{\forall}s_i\gg 0)\qquad \text{etc......}$$

で定まる関数 (の $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^r$ などへの解析接続) / その 整数点 *integral points* での値

⋆ 「p 進」世界 の (致命的) 問題点　「p 進」世界 ではディリクレ級数が 絶望的に 収束しない!!

⇝ 「実 / 複素」世界 と “全く同じストーリー” では 「p 進」世界 の “ゼータ” は 構成出来ない!!

∴ 「p 進」世界 で “ゼータ” を考えるためには 抜本的な $\boxed{\text{発想の転換}}$ が不可欠

※ 特に 「p 進」世界 では [多重] ゼータ値 / 関数の 存在 (構成) ですら 極めて非自明 な主張となる。

スローガン: $\boxed{\text{「}p\text{ 進」世界 の “ゼータ” は 難しい (けど 面白い) !!}}$

(T_T)　\(^o^)/

演習問題　$\mathbb{C}_p$ 値数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束することは、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するための $\boxed{\text{必要十分条件}}$ であることを示しなさい。このことを用いて無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ 及び $\sum_{\substack{n=1\\ p\nmid n}}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ $(k\in\mathbb{N})$ が $\mathbb{C}_p$ では発散する ことを確認しなさい。

‡　‡　‡

反復積分の記号についての規約

$X=\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{0,1,\infty\}$　$\gamma\colon [0,1]\to X$ 区分的に滑らかな道　$\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_r$: X 上の微分 1-形式

に対して $$\int_\gamma \omega_1\omega_2\dots\omega_r := \int_{0<t_1<t_2<\dots<t_r<1}\gamma^*\omega_1(t_1)\wedge\gamma^*\omega_2(t_2)\wedge\dots\wedge\gamma^*\omega_r(t_r)$$ と定める。

“前の微分形式から順に 積分” (順序が逆になっている文献も多いので注意)

積分値が道の始点 α と終点 β にしか依らないときは、単に $\int_\alpha^\beta \omega_1\omega_2\dots\omega_r$ と書く。

2018 年 9 月 11 日 (火)　第 26 回整数論サマースクール『多重ゼータ値』講演資料。講演で話したいことのアウトラインを “ざっくりと” まとめたものです。もう少し説明や証明を “ちゃんと書いた” 補足資料 (前のヴァージョン) も `https://www.cck.dendai.ac.jp/math/~t-hara/talks.html` にご用意しています (が恐らく誤植が稠密に……)。

[†] e-mail: `t-hara@mail.dendai.ac.jp`　サマースクール開催期間中はお気軽に直接ご質問下さい!

■ 1. p 進多重ポリログ関数から p 進 多重ゼータ値へ

※ [Fur03] の表は全体像が見易いので、是非手元に置いておこう!!

発想（視点）の転換

~~多重ゼータ値= 多重ディリクレ級数の $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_r)$ での特殊値~~

ディリクレ級数表示を一旦 “捨て去る”

= $\boxed{\text{多重ポリログ関数の “} z = 1 \text{ での特殊値”}}$

「実 ／ 複素」世界

多重ポリログ関数

$$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(z) = \mathrm{Li}_{k_1,k_2,\ldots,k_r}(z) := \sum_{0<n_1<n_2<\ldots<n_r} \frac{z^{n_r}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \cdots n_r^{k_r}}$$

… $\{z \in \mathbb{C} \mid |z|_\infty < 1\}$ で絶対収束

演習問題 下線部 が成り立つことを確認しなさい。

微分方程式　※ 添字の -1 の 大きさ に注意!!

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z}\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r-1}(z) & (k_r \geq 2) \\ \dfrac{1}{1-z}\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r-1}(z) & (k_r = 1) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Li}_1(z) = \frac{1}{1-z}$$

反復積分表示　※ $\omega_0 = \dfrac{dz}{z}$, $\omega_1 = \dfrac{dz}{z-1}$

$$\mathrm{Li}_{k_1,k_2,\ldots,k_r}(z) = \int_0^z (-\omega_1)\underbrace{\omega_0\ldots\omega_0}_{k_1-1}(-\omega_1)\underbrace{\omega_0\ldots\ldots}_{k_2-1}\ldots(-\omega_1)\underbrace{\omega_0\ldots\omega_0}_{k_r-1}$$

⇝ “道に沿った反復積分” により

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ に 解析接続（多価関数）

多重ゼータ値との関係

$\boldsymbol{k}$: 許容的 *admissible* ⇒ $\boxed{\lim_{\substack{z\to 1 \\ |z|_\infty<1}} \mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(z) = \zeta(\boldsymbol{k})}$

（主枝 *principal branch* 内で近づける）

$\boldsymbol{k}$: 非許容的 *non-admissible* ⇒ $\boxed{\lim_{\substack{z\to 1 \\ |z|_\infty<1}} \mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(z)\text{: 発散}}$

⋆ 他の分枝 *branch* で近づけると、
一般には収束条件や収束値は当然変わる
（モノドロミーの発生）

※ (1 の回りのリーマン面の) 有限の葉 *leaf* の中で
1 に近づけると $\zeta(\boldsymbol{k})$ に収束する？（未確認）

「p 進」世界

p 進多重ポリログ関数

$$\mathrm{Li}^p_{\boldsymbol{k}}(z) = \mathrm{Li}^p_{k_1,k_2,\ldots,k_r}(z) := \sum_{0<n_1<n_2<\ldots<n_r} \frac{z^{n_r}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \cdots n_r^{k_r}}$$

… $\{z \in \mathbb{C}_p \mid |z|_p < 1\}$ で絶対収束

演習問題 下線部 が成り立つことを確認しなさい。

微分方程式　※ 添字の -1 の 大きさ に注意!!

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Li}^p_{k_1,\ldots,k_r}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z}\mathrm{Li}^p_{k_1,\ldots,k_r-1}(z) & (k_r \geq 2) \\ \dfrac{1}{1-z}\mathrm{Li}^p_{k_1,\ldots,k_r-1}(z) & (k_r = 1) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Li}^p_1(z) = \frac{1}{1-z}$$

反復積分表示　※ $\omega_0 = \dfrac{dz}{z}$, $\omega_1 = \dfrac{dz}{z-1}$

単に $z^n \mapsto \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ と計算

$$\mathrm{Li}^p_{k_1,k_2,\ldots,k_r}(z) = \int_0^z (-\omega_1)\underbrace{\omega_0\ldots\omega_0}_{k_1-1}(-\omega_1)\underbrace{\omega_0\ldots\ldots}_{k_2-1}\ldots(-\omega_1)\underbrace{\omega_0\ldots\omega_0}_{k_r-1}$$

⇝ “ 反復コールマン積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{Col}}^{(a)}$ ” で解析接続

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{1, \infty\}$ 上の（一価）関数 $\mathrm{Li}^{p,(a)}_{\boldsymbol{k}}(z)$

p 進多重ゼータ値との関係

$\boldsymbol{k}$: 許容的 ⇒ $\boxed{\lim_{\substack{z\to 1 \\ z\in\mathbb{C}_p\setminus\{1\}}}{}' \mathrm{Li}^{p,(a)}_{\boldsymbol{k}}(z) \overset{\text{定義}}{=:} \zeta_p^{\mathrm{KZ}}(\boldsymbol{k})}$

$\boldsymbol{k}$: 非許容的 ⇒ $\boxed{\lim_{\substack{z\to 1 \\ z\in\mathbb{C}_p\setminus\{1\}}}{}' \mathrm{Li}^{p,(a)}_{\boldsymbol{k}}(z) \text{ は 収束したり発散したり}}$

⋆ どの分枝 $a \in \mathbb{C}_p$ で近づけても
「lim′ の収束 *or* 発散」や収束値は同じ
(“モノドロミーが発生しない”)

※ lim′:「分岐が有限な $\mathbb{Q}_p$ の拡大 の中で近づける」

いやいや、「めでたしめでたし」みたいになってるけど、
“コールマン積分” って結局何なのさ ??

普通は (「実 / 複素」の世界 では) 積分を用いた解析接続 と言いますと **Step 1.** 各点のまわりで ローラン展開 して、**Step 2.** ローラン展開を 項別積分 して、**Step 3.** それぞれ項別積分したものを 《貼り合せる》 という手順で実行されます。ところが 「p 進」世界 で同じ手順に則って “解析接続” を試みますと、忽ち次のような 2 つの問題点 にぶつかってしまうのです !!

問題点 1 p 進位相 は 完全不連結 ゆえ開集合の 共通部分 (“糊代”) を使って 解析接続出来ない !!

(特に個々の開円盤上での “ローラン展開の積分” の 積分定数が《貼り合》わない !!)

問題点 2 $\omega_0 = \dfrac{dz}{z}, \omega_1 = \dfrac{dz}{z-1}$ の “原始関数” は p 進対数関数 $\mathrm{Log}_p\, z$, $\mathrm{Log}_p\,(z-1)$

$\cdots$ $\mathrm{Log}_p z$ の定義域を $\{z \mid |z-1|_p < 1\}$ から $\mathbb{C}_p^\times$ に延ばす “標準的方法” が無い !!

この問題に ロバート・F・コールマン *Robert* F. Coleman は次のような解答を与え、「p 進」世界 でも 「実 / 複素」の世界 と “同じように扱える積分論” を構築しました [Col82, CdS88]。

「p 進世界」特有の構造 !!

解答 1 (リジッド解析学 +) “フロベニウス射 ϕ に沿った” 解析接続 (ドヴォルクの原理)

各開円盤上での “ローラン展開の積分” が フロベニウス作用 ϕ^* と可換になるよう 調整

$\rightsquigarrow$ “積分定数” が 大域的に貼り合う ($\rightsquigarrow$ 線積分 (“定積分”) が可能に !!)

解答 2 (如何ともし難いので) 対数関数の “分枝” (下部参照) を 固定して 積分論を構築

$\rightsquigarrow$ “反復積分” で得られる関数は 分枝に依存 $\rightsquigarrow$ 特殊値の 分枝非依存性 が問題に

コールマン積分論の要点だけをまとめると、大体次のような感じです。取り敢えず以下の性質だけでも頭の片隅に入れておけば、この講演は乗り切れるでしょう (頭に入っていなくても何とかなるようにお話するつもりではありますが)。

“リジッド解析的関数をコールマン積分して出来る関数をすべて集めたもの”

$\boxed{\text{要点}}$ $^\exists A_{\mathrm{Col}}^{(a)}$: (分枝 a の) “コールマン関数の空間” ($\subset \{\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$ の局所解析的関数 $\}$)

$\exists \displaystyle\int_{\mathrm{Col}}^{(a)} : A_{\mathrm{Col}}^{(a)} \otimes_{A^\dagger} \Omega^\dagger \to A_{\mathrm{Col}}^{(a)}/\mathbb{C}_p \cdot 1$ “コールマン積分” (d の逆写像) s.t., $\phi^* \circ \displaystyle\int_{\mathrm{Col}}^{(a)} = \int_{\mathrm{Col}}^{(a)} \circ \phi^*$

$\star$ $\displaystyle\int_{\mathrm{Col}}^{(a)} \omega = F_\omega^{(a)}(z) + C$ とおくと、$\left[\displaystyle\int_{\mathrm{Col}}^{(a)} \omega\right]_\alpha^\beta := F_\omega^{(a)}(\beta) - F_\omega^{(a)}(\alpha)$ は “始点” α, “終点” β のみに依存する (“積分経路” に 依存しない / モノドロミーが発生しない !!)

$\star$ コールマン関数に対しては 一致の原理 *uniqueness principle* が成立; つまり 「許容開集合 *admissible open subset* U 上で $F|_U \equiv 0$ となるコールマン関数 $F \in A_{\mathrm{Col}}^{(a)}$ は零関数」

※ p 進対数関数の “分枝” とは ??

$\boxed{|z-1|_p < 1}$ で絶対収束

$$\mathrm{Log}_p(z) = \mathrm{Log}_p(1 + (z-1)) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n} = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} + \cdots\cdots$$

一方 $\mathbb{C}_p^\times \overset{\text{構造定理}}{\cong} \boxed{p^{\mathbb{Q}}} \times$ (位数が p と素な 1 の冪根) $\times \{z \mid |z-1|_p < 1\}$ $\longleftarrow$ 絶対収束域

捩れ群 ゆえ $\mathrm{Log}_p(xy) = \mathrm{Log}_p\, x + \mathrm{Log}_p\, y$ を保つには $\boxed{0}$ 拡張するしかない

巡回群 $\boxed{p^{\mathbb{Q}}}$ の “生成元” p での値を $\boxed{\mathrm{Log}_p^{(a)}\, p := a}$ と定めたものが “分枝 a の” p 進対数関数

(実用上は $\mathrm{Log}_p^{(0)}\, p = 0$ と最初から決めて用いられることも多い; 岩澤の p 進 対数関数)

p 進多重ゼータ値 $\zeta_p^{\mathrm{KZ}}(\boldsymbol{k})$ の最初の性質

⋆ $\boldsymbol{k}$ が 許容指数 *admissible index* のときは $\zeta_p^{\mathrm{KZ}}(\boldsymbol{k})$ は収束　[Fur04, Theorem 2.18]

$\because$) p 進 KZ 方程式の基本解 $G_0^{(a)}$ の明示公式 & $\varPhi^p_{\mathrm{KZ}} = \lim_{\epsilon\to 0}{}' \epsilon^{-e_1} G_0^{(a)}(1-\epsilon)$ より[*1]

⋆ $\boldsymbol{k}$ が 許容的 でない ときは $\zeta_p^{\mathrm{KZ}}(\boldsymbol{k})$ は 収束したりしなかったり する。収束する場合は シャッフル正規化 p 進 多重ゼータ値 $\zeta_p^{\mathrm{KZ},ш}(\boldsymbol{k})$ に収束する。　[Fur04, Note 2.21, Theorem 2.22]

※ シャッフル正規化の定義は [原田 SS2018, Proposition 1.3] と同様 (“$\zeta(w_{00})$” を “$\zeta_p^{\mathrm{KZ}}(w_{00})$” に取り換える)

$\because$) p 進 KZ 方程式の基本解の関数等式 $J^{(a)}_{p,w}(1-z) = \sum_{w=w'w''} J^{(a)}_{p,\overleftarrow{w'}}(z)\mathcal{I}_p^{\mathrm{KZ}}(w'') +$ 明示公式

※ 右辺に現れる $\mathrm{Log}_p^{(a)}(z)$ の項 が $\lim_{z\to 0}{}'$ で消えるかどうか が収束/非収束の分かれ目

(例えば $\zeta_p^{\mathrm{KZ}}(2k)=0$ のような 「p 進」世界 で 0 となるゼータ値との積 になっている場合など)

⋆ $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して $\zeta_p^{\mathrm{KZ}}(2k)=0$　「p 進世界」では “$\pi^2=0$”　[Fur04, Expample 2.19 (a)]

$\because$) 「コールマンの公式 $(1-p^{-2k})\zeta_p^{\mathrm{KZ}}(2k) = L_p(2k,\omega^{1-2k})$ (第 3 節参照) $+$ $L_p(s,\omega^{1-2k}) \equiv 0$」

または「2-, 3-サイクル関係式」(cf. [原田 SS2018, Proposition 3.4]; 「実 ／ 複素」世界)

⋆ $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\zeta_p^{\mathrm{KZ}}(2k+1) \neq 0 \Leftrightarrow H^2_{\text{ét}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-k)) = 0$ (“高次レオポルト予想”)

岩澤理論的現象との関係?!　[Fur04, Example 2.19 (b)]

⋆ p 進 多重ゼータ値 $\zeta_p^{\mathrm{KZ}}(\boldsymbol{k})$ は (定義からは $\mathbb{C}_p$ の元としか分からないが) 実は $\mathbb{Q}_p$ の元

[Fur04, Theorem 2.25] 「p 進」世界

$\overset{\text{対応}}{\leftrightsquigarrow}$ 多重ゼータ値 $\zeta(\boldsymbol{k})$ は $\mathbb{R}$ の元 「実 ／ 複素」の世界

$\because$) 微分形式 $\omega_0 = \dfrac{dz}{z}$, $\omega_1 = \dfrac{dz}{z-1}$ の $\mathbb{Q}_p$ 有理性 $+$ コールマン反復積分のガロワ同変性 (Amnon Besser–Rob de Jeu; [BdJ03, Remark 2.3]) (+ p 進多重ゼータ値の分枝非依存性)

■ 2. p 進 結合子と知られている結果・予想など

◎ p 進 KZ 方程式と p 進 ドリンフェルト結合子

※ 「実 ／ 複素」の場合 と並行した議論が続くので、適宜 [原田 SS2018] と見比べてみよう。

$X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0,1,\infty\} = \mathbb{C}_p \setminus \{0,1\}$

$\mathcal{C}_X^{\mathrm{la}}$: X 上の 局所解析的関数 の集合　$\supset$　$A^{(a)}_{\mathrm{Col},X}$: X 上の (分枝 a の) コールマン関数の集合

locally analytic function, “X の各点で (収束する) 冪級数展開を持つ関数” のこと

$R\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$: 可換環 R を係数環とし e_0, e_1 を不定元とする非可換形式的冪級数環

$\{e_0,e_1\}^\times$: e_0, e_1 のなす 空語を含む 語全体 $\supset \{e_0,e_1\}^{\times\times}$: e_0, e_1 のなす 空語を含まない 語全体

$G(e_0,e_1)(z) \in \mathcal{C}_X^{\mathrm{la}}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ に関する形式的微分方程式

$$\frac{d}{dz}G(e_0,e_1)(z) = \left(\frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1}\right) G(e_0,e_1)(z) \qquad \cdots\ (\mathrm{KZ})_p$$

$\cdots$ p 進 (形式的) クニズニーク–ザモロドチコフ方程式 (p 進 KZ 方程式)

the p-adic (*formal*) Knizhnik–Zamolodchikov *equation* と呼ぶ。

※ 形式的には 「実 ／ 複素」の場合 と全く同じ ([原田 SS2018, Definition 2.2] も参照)

[*1] 安田正大さんからのコメント: 「p 進反復積分による p 進多重ポリログの定義から、$\boldsymbol{k}$ が許容的なときは “$z=1$ での展開” に現れる $\mathrm{Log}_p^{(a)}(z-1)$ の項が $\lim_{z\to 1}{}'$ ですべて 0 に収束ことを直接確認出来るのではないか?」(ちょっと計算してみた限りでは凄く出来そうな雰囲気ですが、細部までは詰めていません。すみません)

ポイント

分枝 $a \in \mathbb{C}_p$ を選ぶ毎に $(\mathrm{KZ})_p$ の解 $G_0^{(a)}(e_0,e_1)(z)$, $G_1^{(a)}(e_0,e_1)(z) \in A^{(a)}_{\mathrm{Col},X}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ で

$$G_0^{(a)}(e_0,e_1)(z) \approx z^{e_0} \quad (z\to 0), \qquad G_1^{(a)}(e_0,e_1)(z) \approx (1-z)^{e_1} \quad (z \to 1)$$

なる漸近挙動を満たすものが それぞれ唯一つ存在する (解の存在と一意性, [Fur04, Theorem 3.3, Proposition 3.7])。

※ [記号の復習] z^{e_0}, $(1-z)^{e_1}$ は "形式的マクローリン展開" で定義 (本当は p 進対数の 分枝 a に依存!);

$$z^{e_0} = \exp(e_0 \mathrm{Log}_p^{(a)} z) = 1 + \frac{\mathrm{Log}_p^{(a)} z}{1!} e_0 + \frac{\{\mathrm{Log}_p^{(a)} z\}^2}{2!} e_0^2 + \cdots\cdots,$$

$$(1-z)^{e_1} = \exp\bigl(e_1 \mathrm{Log}_p^{(a)}(1-z)\bigr) = 1 + \frac{\mathrm{Log}_p^{(a)}(1-z)}{1!} e_1 + \frac{\{\mathrm{Log}_p^{(a)}(1-z)\}^2}{2!} e_1^2 + \cdots\cdots$$

$G_0^{(a)}(e_0,e_1)(z) \approx z^{e_0}$ $(z\to 0)$
$\Leftrightarrow$ $G_0^{(a)}(e_0,e_1)(z)z^{-e_0}$ の各係数が "$z=0$ のまわりでリジッド解析的" かつ $G_0^{(a)}(e_0,e_1)(z)z^{-e_0} \xrightarrow{z\to 0} 1$

$G_1^{(a)}(e_0,e_1)(z) \approx (1-z)^{e_1}$ $(z\to 1)$
$\Leftrightarrow$ $G_1^{(a)}(e_0,e_1)(z)(1-z)^{-e_1}$ の各係数が "$z=1$ のまわりでリジッド解析的"
かつ $G_1^{(a)}(e_0,e_1)(z)(1-z)^{-e_1} \xrightarrow{z\to 1} 1$

[もう少し詳しい説明] ※ G_0 の方のみ扱います

一意性 $(\mathrm{KZ})_p$ の解 $\in A^{(a)}_{\mathrm{Col},X}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ で $\approx z^{e_0}(z\to 0)$ となるものが $G_0(e_0,e_1)(z)$, $H_0(e_0,e_1)(z)$ の 2 つ存在すると仮定 $\rightsquigarrow$ $\boxed{\frac{d}{dz}\Bigl[\{H_0(e_0,e_1)(z)\}^{-1}G_0(e_0,e_1)(z)\Bigr] \equiv 0}$

演習問題 ライプニッツ則と $(\mathrm{KZ})_p$ を用いて上記の等式を導き出しなさい。

$$\therefore\ \{H_0(e_0,e_1)(z)\}^{-1}G_0(e_0,e_1)(z) = C(e_0,e_1) \in \mathbb{C}_p\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle \quad \text{“定冪級数”}$$

$+$ G_0, H_0 が $z\to 0$ で全く同じ漸近挙動 $\rightsquigarrow C(e_0,e_1)\equiv 1$

※ 「実 / 複素」の場合 とまったく同じ議論; 原田さんのレジュメ [原田 SS2018, Lemma 2.3] も参照[*2]

存在 $G_0(e_0,e_1)(z) = 1 + \sum_{w\in\{e_0,e_1\}^{\times\times}} J_{p,w}(z)w$ とおいて[*3] $(\mathrm{KZ})_p$ の両辺に代入

$\overset{\text{係数比較}}{\rightsquigarrow}$ $\{J_{p,w}(z)\}_w$ 達の間の微分方程式 $\rightsquigarrow$ 反復コールマン積分 で各係数を決定出来る!![*4]

計算例 "e_1 で終わる語" $\boxed{w = e_0^{k_r-1}e_1e_0^{k_{r-1}-1}e_1\ldots e_0^{k_1-1}e_1}$ の係数 $J_{p,e_0^{k_r-1}e_1\ldots e_0^{k_1-1}e_1}(z)$ $(k_1,k_2,\ldots,k_r\in\mathbb{N})$ を調べよう。微分方程式 $(\mathrm{KZ})_p$ の両辺に代入して係数を比較すると

$$\frac{d}{dz}J_{p,e_0^{k_r-1}e_1\ldots e_0^{k_1-1}e_1}(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}J_{p,e_0^{k_r-2}e_1\ldots e_0^{k_1-1}e_1}(z) & (k_r\geq 2), \\ \frac{1}{z-1}J_{p,e_0^{k_{r-1}-1}e_1\ldots e_0^{k_1-1}e_1}(z) & (k_r = 1), \end{cases}$$

$$\frac{d}{dz}J_{p,e_1}(z) = \frac{1}{z-1}$$

$\rightsquigarrow$ $(\pm\frac{1}{z-1}$ の符号以外) p 進 多重ポリログ関数の微分方程式 と同じ形 !!

[*2] 本当は「実 / 複素」の場合 と まったく同じ議論が出来る こと自体驚くべきこと (例えば、「p 進」世界 では普通は「微分が消える $\Rightarrow$ 局所 定数関数 ~~大域的定数~~」)。この離れ業を可能にしているのが コールマン積分論 というわけ。

[*3] 漸近挙動 $\approx z^{e_0}$ $(z\to 0)$ より、定数項が 1 であることが分かる。

[*4] 語 w によっては係数 $J_{p,w}(z)$ を安直に計算すると $z=0$ で発散してしまうため、本当はもう少し丁寧に議論するべき。詳細は [Fur04, Theorem 3.3] の証明を参照。

$$\therefore\ J^{(a)}_{p,\underleftarrow{e_0^{k_r-1}e_1\cdots e_0^{k_1-1}e_1}}(z)=\left[\int_{\mathrm{Col}}^{(a)}\underrightarrow{\omega_1\underbrace{\omega_0\ldots\omega_0}_{k_1-1}\omega_1\ldots\omega_1\underbrace{\omega_0\ldots\omega_0}_{k_{r-1}-1}\omega_1\underbrace{\omega_0\ldots\omega_0}_{k_r-1}}\right]_0^z$$

$$=(-1)^r\left[\int_{\mathrm{Col}}^{(a)}\underrightarrow{(-\omega_1)\underbrace{\omega_0\ldots\omega_0}_{k_1-1}(-\omega_1)\ldots(-\omega_1)\underbrace{\omega_0\ldots\omega_0}_{k_{r-1}-1}(-\omega_1)\underbrace{\omega_0\ldots\omega_0}_{k_r-1}}\right]_0^z$$

$$\overset{\text{定義}}{=}(-1)^r\mathrm{Li}^{p,(a)}_{\underrightarrow{k_1,\ldots,k_{r-1},k_r}}(z)$$

と計算出来る (語の順序 と 多重指数の順序 の 逆転 に注意!!)

※ その他の係数は [原田 SS2018, Theorem 4.4] 参照

$\boxed{(\mathrm{KZ})_p \text{ の基本解 } G_0^{(a)}(e_0,e_1) \text{ の 係数 には } p \text{ 進 多重ポリログ関数 が現れる!!}}$

基本解 $G_0(e_0,e_1)(z)$ の係数に現れる

⋆ (「実 ╱ 複素」 でも 「p 進」 でも) “$\zeta(\boldsymbol{k})=\lim_{z\to1}\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(z)$”

⇝ “$\lim_{z\to1}G_0(e_0,e_1)(z)$” の係数には 多重ゼータ値が現れそう

これがドリンフェルト結合子の “大雑把なイメージ”

※ 勿論 $z=1$ は定義域から外れているので、闇雲に $z=1$ に近づけるのではなく “$z=1$ での漸近挙動を指定しながら極限を取る” 感じ: $G_0(e_0,e_1)(z)\approx(1-z)^{e_1}\boxed{\Phi_{\mathrm{KZ}}(e_0,e_1)}$ $(z\to1)$ みたいな??

[ちゃんとした定義] 基本解 $G_0^{(a)}(e_0,e_1)(z)$ と $G_1^{(a)}(e_0,e_1)(z)$ の “ずれ” を見る;

$$\boxed{\Phi^p_{\mathrm{KZ}}(e_0,e_1):=\left\{G_1^{(a)}(e_0,e_1)(z)\right\}^{-1}G_0^{(a)}(e_0,e_1)(z)}$$

⋯ p 進ドリンフェルト結合子 *the p-adic* DRINFEL'D *associator* [Fur04, Definition 3.12]

⋆ “z に依らない冪級数” $\in\mathbb{C}_p\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ (さらに強く $\in\mathbb{Q}_p\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$) となるのは 「実 ╱ 複素」の場合 とまったく同じ ([Fur04, Remark 3.9], [原田 SS2018, Lemma 2.7] 参照)

⋆ ⋯⋯ということは、右辺の定義の z にどんな値を代入しても変わらない から、“リジッド解析的な領域” の値 を放り込めば、どんな分枝 $a\in\mathbb{C}_p$ を選んでいても 同じ冪級数 が出て来る筈

⇝ $\Phi^p_{\mathrm{KZ}}(e_0,e_1)$ は 分枝 $a\in\mathbb{C}_p$ の取り方に依らない!! [Fur04, Theorem 3.10]

他にも「$\Phi^p_{\mathrm{KZ}}(e_0,e_1)=1+\sum_{w\in\{e_0,e_1\}^{\times\times}}\mathcal{I}^{\mathrm{KZ}}_p(w)w$ と表したとき、語 $w=\underleftarrow{e_0^{k_r-1}e_1\cdots e_0^{k_1-1}e_1}$ ($\underline{k_r\geq2}$; “e_0 で始まって e_1 で終わる語”) の係数 $\mathcal{I}^{\mathrm{KZ}}_p(\underleftarrow{e_0^{k_r-1}e_1\cdots e_0^{k_1-1}e_1})$ に対応する p 進多重ゼータ値 $(-1)^r\zeta_p^{\mathrm{KZ}}(\underrightarrow{k_1,k_2,\ldots,k_r})$ があらわれる[*5]」とか「$\Phi^p_{\mathrm{KZ}}(e_0,e_1)$ が 群的元 *group-like element* であることから シャッフル積公式 *shuffle product formula* が導かれる」とか、大事なことは沢山あるけど⋯⋯

「実 ╱ 複素」の場合と殆ど
同じなので 詳細はすべて割愛!! *6

原田遼太郎さんの講演 / レジュメ [原田 SS2018] を参照しよう!!

*5 その他の係数については [原田 SS2018, Theorem 4.10] を参照。

*6 流石に良心の呵責というものがありますので、補足資料 の方に少し詳しく書いておきました。誤植が多いです。。

この辺りの議論 / 計算の要点

- ⋆ KZ 方程式の基本解の 存在 と 一意性 が成り立つ
- ⋆ 基本解 $G_0(e_0, e_1)(z)$ の係数に多重ポリログ関数が現れる

「実 / 複素」の場合 も 「p 進」の場合 もこの 2 点に依拠して議論 ⇝ パラレルに議論が進行する!!

◎ ドリーニュ結合子とドリーニュの p 進多重ゼータ値

非可換冪級数 $\boxed{\Phi^p_{\mathrm{De}}(e_0, e_1)} \in \mathbb{Q}_p\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$ を次の式で定める[*7];

$$\Phi^p_{\mathrm{KZ}}(e_0, e_1) = \Phi^p_{\mathrm{De}}(e_0, e_1) \cdot \Phi^p_{\mathrm{KZ}}\left(\frac{e_0}{p}, \Phi^p_{\mathrm{De}}(e_0, e_1)^{-1}\frac{e_1}{p}\Phi^p_{\mathrm{De}}(e_0, e_1)\right) \qquad \cdots \text{(KZD)}$$

⋯ ドリーニュ結合子 Deligne *associator*

$\Phi^p_{\mathrm{De}}(e_0, e_1) = 1 + \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^{\times\times}} \mathcal{I}^{\mathrm{De}}_p(w)w$ と表したとき、語 $w = e_0^{k_r-1}e_1e_0^{k_{r-1}-1}e_1 \cdots e_1e_0^{k_1-1}e_1$ ($k_r \geq 2$; "e_0 で始まり e_1 で終わる語") の係数を

$$\mathcal{I}^{\mathrm{De}}_p(e_0^{k_r-1}e_1e_0^{k_{r-1}-1}e_1 \cdots e_1e_0^{k_1-1}e_1) =: (-1)^r\zeta^{\mathrm{De}}_p(k_1, k_2, \ldots, k_r)$$

と書いて ドリーニュの p 進 多重ゼータ値 Deligne*'s p-adic multiple zeta values* と呼ぼう。

※ もちろん "ドリンフェルト結合子 Φ^p_{KZ} の係数に $(-1)^r\zeta^{\mathrm{KZ}}_p(\boldsymbol{k})$ があらわれること" を真似してます

◇ 等式 (KZD) を展開して係数比較することで $\zeta^{\mathrm{KZ}}_p(\boldsymbol{k})$, $\zeta^{\mathrm{De}}_p(\boldsymbol{k})$ の一方を他方の $\mathbb{Q}_p$ 線型結合で表すことが可能 である。その意味で [Fur07] では、$\zeta^{\mathrm{KZ}}_p(\boldsymbol{k})$ と $\zeta^{\mathrm{De}}_p(\boldsymbol{k})$ を "等しくはないが等価" "*not the same but equivalent*" と表現している。

例 [Fur07, Example 2.10]

- (深さ 1) $\zeta^{\mathrm{De}}_p(k) = \left(1 - \frac{1}{p^k}\right)\zeta^{\mathrm{KZ}}_p(k) \qquad (k \geq 2)$
- (深さ 2) $k_2 \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned}\zeta^{\mathrm{De}}_p(k_1, k_2) = &\left(1 - \frac{1}{p^{k_1+k_2}}\right)\zeta^{\mathrm{KZ}}_p(k_1, k_2) - (1 - \delta_{k_1,1})\left(\frac{1}{p^{k_2}} - \frac{1}{p^{k_1+k_2}}\right)\zeta^{\mathrm{KZ}}_p(k_1)\zeta^{\mathrm{KZ}}_p(k_2) \\ &- \sum_{i=0}^{k_1-2}(-1)^i\left(\frac{1}{p^{k_1-i}} - \frac{1}{p^{k_1+k_2}}\right)\binom{k_2-1+i}{k_2-1}\zeta^{\mathrm{KZ}}_p(k_1-i)\zeta^{\mathrm{KZ}}_p(k_2+i) \\ &- (-1)^{k_1}\sum_{j=0}^{k_2-2}\left(\frac{1}{p^{k_2-j}} - \frac{1}{p^{k_1+k_2}}\right)\binom{k_1-1+j}{k_1-1}\zeta^{\mathrm{KZ}}_p(k_1+j)\zeta^{\mathrm{KZ}}_p(k_2-j)\end{aligned}$$

但し $\delta_{k_1,1} = \begin{cases} 1 & (k_1 = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (k_1 \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$ はクロネッカーのデルタ記号。つまり 緑下線部 は $k_1 = 1$ のときは 0 と見做す[*8]。 **演習問題** (KZD) を展開して (深さ 2) の等式を導き出すことに挑戦してみよう!!

[*7] 右辺を展開して各語の係数を比較すれば、(かなり面倒くさいけど) 語の "深さ" (e_1 の個数) が小さいものから順に $\Phi^p_{\mathrm{De}}(e_0, e_1)$ の係数が決まっていく様子が確認出来る……はず。

[*8] 単に結合子の e_1 の係数が 0 であることの帰結。[Fur07, Example 2.10] の式も "$\zeta^{\mathrm{KZ}}_p(1) = \zeta^{\mathrm{De}}_p(1) = 0$" という規約 (正規化?) の下では正しいが、[Fur07, Note 2.6] で "結合子のすべての係数が許容指数の p 進多重ゼータ値のみで書き下せる" ことが強調されているため、ここでは許容指数の p 進多重ゼータ値のみを用いた等式の形で表現してみた。

[様々なコメント]

⋆ 午後の安田正大さんの講演の主役は ドリーニュの p 進 多重ゼータ値 $\zeta_p^{\mathrm{De}}(\boldsymbol{k})$ です!!

⋆ 天下り的で如何にも "胡散臭そう" な定義をしちゃってますが、もちろんドリーニュ結合子 Φ^p_{De} にも「$\overrightarrow{01}=1_0=\mathbb{0}$ と $\overrightarrow{10}=-1_1=\mathbb{1}$ を繋ぐ "標準的なドラーム道" $d_{\overrightarrow{01},\overrightarrow{10}}$ へのフロベニウス作用を記述する冪級数」という (Φ^p_{KZ} とは全く別方向の) 立派なルーツがあります。ドリーニュ結合子 Φ^p_{De} は 2002 年のアリゾナウィンタースクールでドリーニュが出題した課題 [De02] に於いて導入されたもので、その背景にはドリーニュ自身も多大な貢献をした $\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}$ の代数的基本群の理論 [De89] が深く関わっています。詳細は [Fur07, Definition 2.7] を参照。

⋆ そもそも $\Phi^p_{\mathrm{De}}(e_0,e_1)$ を "定義している" 等式 (KZD) 自体が「ごちゃごちゃし過ぎて訳が分からん!!」と憤慨されるのも無理はないですが、実は (KSD) は 次数付きグロタンディーク–タイヒミューラー群 $\mathrm{GRT}(\mathbb{Q}_p)=\mathbb{Q}_p^\times\ltimes\mathrm{GRT}_1(\mathbb{Q}_p)$ ("退化結合子の棲み家") の積 $\circ$ と密接に関係しています ([Fur16, 定理 1.33 (2)] と比べてみよう)。この複雑怪奇な積 $\circ$ を用いると、$\Phi^p_{\mathrm{De}}(e_0,e_1)$ は $\Phi^p_{\mathrm{KZ}}(e_0,e_1)$ を用いて $\boxed{(p,\Phi^p_{\mathrm{De}}(e_0,e_1))=(p,\Phi^p_{\mathrm{KZ}}(e_0,e_1))\circ(1,\Phi^p_{\mathrm{KZ}}(e_0,e_1))^{-1}}$ と簡潔に表されてしまいます。この式を眺めていますと、ドリーニュ結合子 $\Phi^p_{\mathrm{De}}(e_0,e_1)$ は或る意味でドリンフェルト結合子 $\Phi^p_{\mathrm{KZ}}(e_0,e_1)$ の "お隣りさんの結合子" であると思えてくるでしょう?

⋆ ドリーニュ結合子などの背景に潜む多重ゼータ値の理論の "基本群的側面" (淡中解釈) には深入りしませんが、4 日目の山本修司さん、佐久川憲児さん、萩原啓さん達の講演で多少はその雰囲気を味わえるかも?? (報告集では補足する……かもしれません)

◎ p 進 多重ゼータ値について知られていること・予想などのまとめ

⋆ $\Phi^p_{\mathrm{KZ}}(e_0,e_1)$ が 群的元 *group-like element* であること、$\Phi^p_{\mathrm{KZ}}(e_0,e_1)\in\exp\big[\mathbb{L}^\wedge_{\mathbb{C}_p},\mathbb{L}^\wedge_{\mathbb{C}_p}\big]$ [Fur04, Proposition 3.43, Theorem 3.45]

$\rightsquigarrow$ 特に $\boxed{\text{シャッフル積公式 } \mathcal{I}_p^{\mathrm{KZ}}(w)\mathcal{I}_p^{\mathrm{KZ}}(w')=\mathcal{I}_p^{\mathrm{KZ}}(w ⧢ w')}$ が成立 [Fur04, Corollary 3.46]

⋆ 双対性 *duality* "$e_i\mapsto e_{1-i}$" で $(-1)^{\mathrm{dep}(w)}\mathcal{I}_p^{\mathrm{KZ}}(w)$ は不変　(田中立志 [Ta04], 古庄英和)

⋆ ドリーニュ結合子 $(0,\Phi^p_{\mathrm{De}}(e_0,e_1))$ の結合子関係式 (Sinan Ünver [Ün13, Section 7]), p 進ドリンフェルト結合子 $(0,\Phi^p_{\mathrm{KZ}}(e_0,e_1))$ の結合子関係式 (古庄英和 [Fur07, Proposition 3.1])*9

⋆ 複シャッフル関係式 (Amnon Besser–古庄英和 [BF06])　※ 次ページも参照

⋆ 正規化複シャッフル関係式 (古庄英和–Amir Jafari [FJ07])　※ 次ページも参照

⋆ (次元予想, 古庄英和–山下剛 [Ya10, Conjecture 2.])

数列 $\{d^p_n\}_{n=0}^\infty$ を隣接 4 項間漸化式 $d^p_{n+3}=d^p_{n+1}+d^p_n$, $d^p_0=1$, $d^p_1=d^p_2=0$ によって定める (つまり $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty d^p_n t^n=\frac{1-t^2}{1-t^2-t^3}$)。このとき $\mathcal{Z}^p_k=\langle\zeta_p^{\mathrm{KZ}}(\boldsymbol{k})\mid\boldsymbol{k}\colon\text{許容的},\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{k})=k\rangle_{\mathbb{Q}}\subset\mathbb{Q}_p$

の次元は $\boxed{\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}^p_k=d^p_k}$ を満たすだろう*10。　$\zeta_p^{\mathrm{De}}(\boldsymbol{k})$ でも可 (等価性より)

◇ 次元の上界 $\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}^p_k\le d^p_k$ は既知 ("p 進 Deligne–Goncharov–寺杣の定理") (山下剛 [Ya10, Theorem 1.3]) ※ 手法は Deligne–Goncharov の p 進版 (萩原啓さんの講演も参照)

◇ p 進多重 L 値についての次元予想と次元の上界の結果もある　[Ya10, Theorem 1.4]

*9 古庄は式 (KZD) (つまり "$\mathrm{GRT}(\mathbb{Q}_p)$ の積の等式") を用いて、Ünver による $(0,\Phi^p_{\mathrm{KZ}}(e_0,e_1))$ の結合子関係式から $(0,\Phi^p_{\mathrm{KZ}}(e_0,e_1))$ の結合子関係式を導出している。ただ Ünver の結果も、5-サイクル関係式の証明ではコールマン積分論による解釈を援用しており、完全に "純代数幾何的な証明" (p 進積分論を用いない証明) というわけでもない。

*10 ザギエ予想 (「実 ／複素」の場合) の数列 $\{d_n\}_n$ とは $\boxed{d_n=d^p_{n+3}}$ という関係にある。「p 進」世界 での関係式 $\zeta_p^{\mathrm{KZ}}(2k)=\zeta_p^{\mathrm{De}}(2k)=0$ により、特に $\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}^p_2=0$ となるため、数列 $\{d^p_n\}_n$ が $\{d_n\}_n$ からずれているのである。

- ⋆ (p 進整性) $(p\mathbb{Z}_p)^{[n]}$ $(n \geq 0)$ を $\left\{ \frac{p^j}{j!} \,\middle|\, j \geq n \right\}$ で生成される $\mathbb{Q}_p$ の $\mathbb{Z}_p$ 部分加群 (“PD イデアル”) とするとき $\boxed{\zeta_p^{\mathrm{KZ}}(\boldsymbol{k}) \in (p\mathbb{Z}_p)^{[\mathrm{wt}(\boldsymbol{k})]}}$ (特に $p > \mathrm{wt}(\boldsymbol{k})$ のとき $\boxed{\zeta_p^{\mathrm{De}}(\boldsymbol{k}) \in \mathbb{Z}_p}$)
  (赤木和真–広瀬稔–安田正大 [AHY, Ak17], Andre CHATZISTAMATIOU [Cha17, Corollary 5.5])
- ⋆ (金子昌信–*Don* ZAGIER の有限多重ゼータ値への応用)
  $\zeta_p^{\mathrm{De}}(\boldsymbol{k})$ の法 p 還元と $\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k})$ との関係、有限多重ゼータ値の空間の次元の上界評価への応用
  (赤木和真–広瀬稔–安田正大 [AHY, Ak17] + David JAROSSAY [Jar, (1.4.7)]*11)
- ⋆ (*falklore?* 古庄英和*?*) $\mathcal{Z}_k^{\mathbb{R}} = \langle \zeta(\boldsymbol{k}) \mid \boldsymbol{k}\colon$ 許容的$, \mathrm{wt}(\boldsymbol{k}) = k \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$ に対し
  $$\phi_p = (\phi_{p,k})_k \colon \mathcal{Z}^{\mathbb{R}} := \sum_{k \geq 0} \mathcal{Z}_k^{\mathbb{R}} \to \mathcal{Z}^p := \sum_{k \geq 0} \mathcal{Z}_k^p;\ \zeta(\boldsymbol{k}) \mapsto \zeta_p^{\mathrm{KZ}}(\boldsymbol{k}) \quad (\text{または } \zeta_p^{\mathrm{De}}(\boldsymbol{k}))$$
  は well-defined な $\mathbb{Q}$ 代数の準同型となるだろう*12。 ※ $\mathrm{Ker}\,\phi_p \overset{??}{=} \mathcal{Z}^{\mathbb{R}}\zeta(2)$, 特に p に非依存*?*
  - ◇ 正標数 (“関数体版”) 多重ゼータ値 (Leonard CARLITZ, Dinesh S. THAKUR) の世界では、上の予想に対応する結果あり (張介玉–三柴善範 [ChM]; t-モチーフの理論等を用いる)

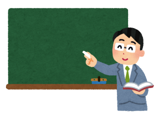
※ 赤下線部 に関しては、本日午後の安田正大さんの講演をお楽しみに*!!*

あっれれ〜*?* おっかしいぞ〜*?* (正規化) 複シャッフル関係式 って 積分表示由来の シャッフル積公式 と 級数表示由来の 調和積公式 を繋ぎ合せて出来るんだったでしょ*?* そんで、「p 進」世界では 級数表示を “捨てて” 多重ゼータ値を考えるんだって、おじさん言ってたよね*?* それなら、「複シャッフル関係式」だの何だの言う前に、そもそも 調和積なんて定義出来ないんじゃないの*?*

良い質問ですね*!!* 確かに p 進 多重ゼータ値に対して 直接級数表示を考えることは出来ませんが、……。ほら、定義を思い出してみて下さい。p 進 多重ゼータ値 は 冪級数表示を持つ関数 である p 進 多重ポリログ関数 の $z \to 1$ での極限値 として定義されていましたでしょ*?* ですから、p 進 多重ポリログ関数の段階で

$$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}^p(z_1) \cdot \mathrm{Li}_{\boldsymbol{\ell}}^p(z_2) = \left(\sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{z_1^{n_r}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \cdots n_r^{k_r}} \right) \left(\sum_{0<m_1<\cdots<m_s} \frac{z_2^{m_s}}{m_1^{\ell_1} m_2^{\ell_2} \cdots m_s^{\ell_s}} \right)$$

を計算するのは “級数の掛け算” だから簡単なんですね。ただ、上の式からも分かりますように p 進 多重ポリログ関数の積は 2 変数関数 になりますから、これを “解析接続” するためには先ずコールマン積分論を 多変数版に拡張 する必要があるわけです*13(これは何と BESSER によって淡中解釈を用いて達成されています [Bes02])。問題はそれだけではなくてですね、極限を取る際の (z_1, z_2) の $(1,1)$ への “近づけ方” にも注意を払う 必要があるんですね ($\zeta_p^{\mathrm{KZ}}(\boldsymbol{k})$ の “定義” の際の $\lim'$ のように*?*)。[BF06, FJ07] では 接基点 *tangential base points* の理論 (山本修司さんの講演を参照) の 高次元化 を展開して、それを用いて “(z_1, z_2) の $(1,1)$ への近づけ方” を指定して極限を取ることで (正規化) 調和積公式を示し、(正規化) 複シャッフル関係式 を導いた、ということなんですね。



*11 [AHY] が当該結果を導出する際に、一般に成り立つことを仮定して用いていた或る種の調和和と (ドリーニュの) p 進多重ゼータ値の間の関係式 [Jar, (1.4.7)] を、最終的に JAROSSAY が証明したという関係。

*12 つまり 「実 多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$ 線形関係式は、p 進 多重ゼータ値でもすべて同じ形で成り立つだろう」ということ。

*13 「実 / 複素」の世界 でさえ、1 変数関数論と多変数関数論の間には大きなギャップが見られるのだから、ましてや「p 進」世界 では……。と言うわけで、 コールマン積分の多変数版への拡張 は見た目よりもずっと難しい問題である。

■ 3. 付録： p 進 [多重] L 関数とコールマン型公式

◎ 「p 進」世界 で "ゼータ関数" をどう "定義する"?

~~[多重] ディリクレ級数~~ …… 「p 進」世界 では全然収束しない

~~[多重] ポリログ関数~~ …… 「p 進」化 は p 進 [多重] ポリログ関数　~~p 進 ゼータ関数~~

アイデア　ゼータと "相性が最悪" とも言える p 進位相 の性質を "逆手に取る"

「p 進」世界では $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}_p$ の中で 稠密 *dense*

$\rightsquigarrow$ "たくさんの整数点" での値を指定すれば、それを補間する $\mathbb{Z}_p$ 上の正則関数は高々一つ

("p 進 一致の定理")

$\therefore$ "たくさんのゼータ値を補間する" 正則関数を作ろう!!

(補間性質 *interpolation property* による p 進ゼータ関数の特徴付け)

以下、簡単のため p は 奇素数 とする[*14]

また 有理数体の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ の $\mathbb{C}$ および $\mathbb{C}_p$ への埋め込みを固定する[*15]

◎ 1 変数の場合 — 久保田–レオポルトの p 進 L 関数とコールマンの公式

χ: 導手 f_χ のディリクレ指標

$L(s,\chi) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$　ディリクレの L 関数 DIRICHLET L-function

Re$(s) > 1$ で絶対収束 $\rightsquigarrow$ $\mathbb{C}$ 全体に有理型解析接続可能

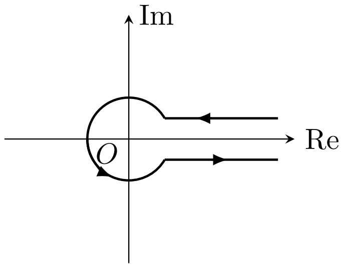
ハンケル経路 (右図) に沿った $\displaystyle\frac{1}{z}\mathfrak{H}_\chi(z) := \sum_{\alpha=1}^{f_\chi} \frac{\chi(\alpha)e^{\alpha z}}{e^{f_\chi z}-1}$ の

"メラン変換 MELLIN *transformation*"

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\mathscr{C}_\varepsilon} \frac{\mathfrak{H}_\chi(z)}{z} z^{s-1}\,dz = (-1)^{\operatorname{sgn}\chi}(e^{2\pi\sqrt{-1}s}-1)\Gamma(s)L(s,\chi)}$$

による

$\chi \neq \mathbb{1}$ なら正則、$\chi = \mathbb{1}$ (自明指標) なら $s=1$ で 1 位の極



ハンケル経路 HANKEL *contour* $\mathscr{C}_\varepsilon$

特に $\boxed{s = 1-k}$ を代入して計算すると $\boxed{L(1-k,\chi) = -\dfrac{B_{\chi,k}}{k}}$　$(\in \mathbb{Q}(\operatorname{Im}\chi))$

※ $B_{\chi,k}$: 一般化関–ベルヌーイ数 *generalised* SEKI–BERNOULLI *number*

母関数: $\displaystyle\mathfrak{H}_\chi(t) := \sum_{\alpha=1}^{f_\chi} \frac{\chi(\alpha)te^{\alpha t}}{e^{f_\chi t}-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_{\chi,k}\frac{t^k}{k!}$

[*14] 簡単な修正により、ほぼ全ての内容が $p=2$ でも成り立ちます。

[*15] p 進 L 関数の補間性質を扱う際には $\overline{\mathbb{Q}}$ の元 (ディリクレ L 関数の場合は $\mathbb{Q}(\operatorname{Im}\chi)$ の元だけでも十分) を複素数と見做したり p 進数と見做したりする必要があるため、予め埋め込みを固定して考える必要がある。慣れない人は、このレジュメを読むだけならば "おまじない" 程度に考えておいても差し支えありません。

定理 (久保田–レオポルトの p 進 L 関数) [KL64, Section 3]

$\mathbb{Z}_p$ 上の有理型関数[16] $L_p(s,\chi)$ で補間性質

$$\boxed{L_p(1-k,\chi) = (1-\chi(p)p^{k-1})L(1-k,\chi) \qquad \text{for } k \in \mathbb{N},\ (p-1) \mid k}$$

によって特徴付けられるものが唯一つ存在する。 ※ 補間性質はもう少し精密化出来る

素朴な (安直な?) 発想

p 進 L 関数の 負の整数点での値 $\xleftrightarrow{\text{補間}}$ 複素 L 関数の 負の整数点での値

p 進 L 関数の 正の整数点での値 $\xleftrightarrow{\text{関係??}}$ 複素 L 関数の 正の整数点での値 の p 進版?

p 進 ゼータ値? p 進 L 値?

…これを記述したのが コールマンの公式

定理 (コールマンの公式[17], Robert F. Coleman [Col82, Chapter I. (4), Chapter VII.])

$k \geq 2$ に対して $\boxed{\lim_{z\to 1}{}' \mathrm{Li}_k^{p,(a)}(z) = \dfrac{p^k}{p^k-1} L_p(k,\omega^{1-k})}$ (ω は法 p タイヒミューラー指標)

※ 左辺は [Fur04] の記号での $\zeta_p^{\mathrm{KZ}}(k)$!!

【証明のキーポイント】 $\boxed{\text{コブリッツの } p \text{ 進測度 } \mu_{\xi^{-1}}}$ [Ko79, § 1., Key example & Proposition 2]

… レルヒ型 ゼータ 関数 $\zeta(s,\xi) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n^s}$ の特殊値を補間

ξ: 1 の c 乗根 ($\xi \neq 1$ かつ $(c,p) \neq 1$)

$$\boxed{\mu_{\xi^{-1}}: x + p^n\mathbb{Z}_p \mapsto \frac{(\xi^{-1})^x}{1-(\xi^{-1})^{p^n}}}$$

e^{xt} を積分 $\left(|t|_p < p^{-1/(p-1)}\right)$

$$\int_{\mathbb{Z}_p} e^{xt}\, d\mu_{\xi^{-1}} = \boxed{\frac{1}{1-\xi^{-1}e^t}}$$

右辺の $\boxed{\dfrac{1}{1-\xi^{-1}e^t}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \boxed{(-1)^{k+1}\zeta(-k,\xi)} \frac{t^k}{k!}$

… “$\boxed{\zeta(s,\xi)}$ の特殊値” の母関数

特に $e^{xt} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} t^k$ と展開して $\dfrac{t^k}{k!}$ の係数を比較

$$\rightsquigarrow \boxed{\int_{\mathbb{Z}_p} x^k\, d\mu_{\xi^{-1}} = \boxed{(-1)^{k+1}\zeta(-k,\xi)}}$$

x^{-k} を積分

$$\boxed{\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{-k}\, d\mu_{\xi^{-1}} = \boxed{\mathrm{Li}_k^{p,\dagger}(\xi^{-1})}}$$

$$\boxed{\mathrm{Li}_k^{p,\dagger}(z) := \mathrm{Li}_k^{p,(a)}(z) - \frac{1}{p^k}\mathrm{Li}_k^{p,(a)}(z^p)}$$

(コールマンの) 過収束 p 進 ポリログ関数

overconvergent p-adic polylogarithm

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{z \mid |z-1|_p \leq p^{-1/(p-1)}\}$ で (リジッド) 解析的になるように $\mathrm{Li}_k^{p,(a)}(z)$ の “p 部分” を修正したもの (特にこの領域では 分枝 $a \in \mathbb{C}_p$ に依らない)

[16] 各点で (負冪項が有限な) ローラン級数展開が出来る関数のこと。なお、定義域は $|s|_p < p^{\frac{p-2}{p-1}}$ まで拡張可能。

[17] 補足資料 には指標付き版 (L 関数の場合) も書きました (誤植が…以下略)。

閑話休題 コブリッツ p 進 測度 $\mu_{\xi-1}$ は素晴しい!! (⇜ “レルヒ型ゼータ関数は素晴しい!?”)

⋆ 測度 $\mu_{\xi-1}$ の 有界性のチェックが容易!! (普通は測度の有界性は結構面倒)

⋆ x^k ($k \in \mathbb{Z}$) の積分が 直接計算 (e^{tx} の積分) で一気に出来る!!

(普通は k 毎に測度 μ_k を作って “クンマー型合同式 $\mu_k \equiv x^k \mu_1$” を使う ⇜ これまた結構面倒)

⇝ ξ を “動かして寄せ集める”

$$\boxed{\tilde{\mu}_c := \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi\neq 1}} \mu_{\xi-1}}$$

※ $\xi = 1$ を除く のがポイント (そこに “極がある” から)

x^{k-1} を積分[*18]

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k-1}\, d\tilde{\mu}_c = \underbrace{(c^k-1)}_{\text{邪魔な項}}\underbrace{(1-p^{k-1})}_{p\text{ オイラー因子}}\zeta(1-k)$$

(除かれるべき因子)

というわけで…

$$\boxed{L_p(s,\omega^a) := \frac{1}{\omega^a(c)\langle c\rangle^{1-s}-1}\int_{\mathbb{Z}_p^\times}\omega^{a-1}(x)\langle x\rangle^{-s}\, d\tilde{\mu}_c}$$

とおくと、$k \equiv a \pmod{p-1}$ なる正の整数 k に対して

$$L_p(1-k,\omega^a) = (1-p^{k-1})\zeta(1-k)$$

(補間公式 を満たす

⇝ 久保田–レオポルトの p 進 L 関数!!)

演習問題 $L_p(s,\omega^a)$ の定義式に $s = 1-k$ を代入して、補間公式が成り立つことを確認しなさい。

※ $\mathbb{Z}_p^\times \cong \mu_{p-1}(\mathbb{Z}_p) \times (1+p\mathbb{Z}_p)$

$\quad x \quad = \quad \omega(x) \qquad\qquad \langle x\rangle$

$\langle x\rangle := x\omega(x)^{-1} \in (1+p\mathbb{Z}_p)$ (岩澤の括弧)

⇝ $s \in \mathbb{Z}_p$ に対して $s \mapsto \langle x\rangle^s$ が連続写像

x^{-k} を積分

$$\cancel{(c^{1-k}-1)}L_p(k,\omega^{1-k})$$

$$\Big\| \ L_p(s,\omega^{1-k}) \text{ の定義}$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{-k}\, d\tilde{\mu}_c = \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi\neq 1}}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{-k}\, d\mu_{\xi-1}$$

$$= \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi\neq 1}} \mathrm{Li}_k^{p,\dagger}(\xi^{-1})$$

$$= \sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi\neq 1}} \mathrm{Li}_k^{p,(a)}(\xi^{-1}) - \frac{1}{p^k}\sum_{\substack{\xi^c=1 \\ \xi\neq 1}} \mathrm{Li}_k^{p,(a)}(\xi^{-p})$$

$$= \cancel{(c^{1-k}-1)}(1-p^{-k})\lim_{z\to 1}{}' \,\mathrm{Li}_k^{p,(a)}(z)$$

よって

$$\boxed{L_p(k,\omega^{1-k}) = (1-p^{-k})\lim_{z\to 1}{}' \,\mathrm{Li}_k^{p,(a)}(z)}$$

が成り立つ。

式変形のポイントはどちらも 級数表示では “当たり前に” 成り立つ式 (ζ_c は 1 の原始 c 乗根):

$$\sum_{\xi^c=1}\zeta(s,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n+\zeta_c^n+\ldots+\zeta_c^{(c-1)n}}{n^s} = \sum_{\substack{n=1 \\ c|n}}\frac{c}{n^s} = c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(cn)^s} = c^{1-s}\zeta(s)$$

$$\sum_{\xi^c=1}\mathrm{Li}_k^p(\xi z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1^n+\zeta_c^n+\ldots+\zeta_c^{(c-1)n})z^n}{n^k} = \sum_{\substack{n=1 \\ c|n}}\frac{cz^n}{n^k} = c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(cn)^k} = c^{1-k}\mathrm{Li}_k^p(z)$$

⇝ (複素積分 / コールマン積分で) 解析接続 して用いている!!

[*18] 前ページの $\mu_{\xi-1}$ の補間性質を考慮すると、本当は k が奇数のとき は積分値が $-(c^k-1)(1-p^{k-1})\zeta(1-k)$ となり符号が異なる筈だが、このときは 赤下線部 がすべて 0 になるため、結果的に符号の違いはあまり問題にならない。[Ko79] はこの辺りの符号の機微は結構無頓着に扱っているように見える。

◎ 多変数の場合 — 古庄英和–小森靖–松本耕二–津村博文の p 進多重 L 関数 [FKMT17b]

以下 太字の記号 $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\xi}$, etc...... は r 個の成分を持つベクトル を表すものとする

$\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_r) \in \mathbb{C}^r$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$: 1 の冪根のなすベクトル

$$\zeta(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\xi}) := \sum_{\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}^r} \frac{\xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \cdots \xi_r^{m_r}}{m_1^{s_1}(m_1+m_2)^{s_2} \cdots (m_1+m_2+\ldots+m_r)^{s_r}}$$

オイラー–ザギエ–レルヒ型多重ゼータ関数 *multiple zeta function of* EULER–ZAGIER–LERCH *type*

$\mathcal{D}_r := \{\boldsymbol{s} \in \mathbb{C}^r \mid \mathrm{Re}(s_{r-\alpha+1} + \ldots + s_r) > \alpha \text{ for } 1 \leq {}^\forall\alpha \leq r\}$ で絶対収束

$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$ に対し $\boxed{\xi_j \neq 1}$ $(1 \leq {}^\forall j \leq r)$ のとき $\mathbb{C}^r$ に 正則に 解析接続

…… ハンケル経路の直積 $\mathscr{C}_\varepsilon^r$ での

$$\mathfrak{H}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}^{-1}) := \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{1 - \xi_j^{-1} \exp\left(\sum_{k=j}^{r} z_k\right)}$$
$$= \frac{1}{1 - \xi_1^{-1} e^{z_1+z_2+\ldots+z_r}} \cdot \frac{1}{1 - \xi_2^{-1} e^{z_2+\ldots+z_r}} \cdots \frac{1}{1 - \xi_r^{-1} e^{z_r}}$$

の "多重メラン変換" による;

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\mathscr{C}_\varepsilon^r} \mathfrak{H}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}^{-1}) z_1^{s_1-1} z_2^{s_2-1} \cdots z_r^{s_r-1}\, dz_1 dz_2 \ldots dz_r = (-1)^r \left\{ \prod_{j=1}^{r} (e^{2\pi\sqrt{-1}s_j} - 1)\Gamma(s_j) \right\} \zeta(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\xi})$$

特に $\boldsymbol{k} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r$ に対して $\boxed{\zeta(-\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\xi}) = (-1)^{r+|\boldsymbol{k}|}\mathfrak{B}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\xi}^{-1})}$ $(\in \mathbb{Q})$ [FKMT17a, Theorem 2.1]

※ $|\boldsymbol{k}| = k_1 + k_2 + \ldots + k_r$, $\mathfrak{B}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\xi}^{-1})$ は母関数 $\mathfrak{H}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\xi}^{-1})$ で定義;

$$\mathfrak{H}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\xi}^{-1}) = \sum_{\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_r) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r} \mathfrak{B}\big((k_1, k_2, \ldots, k_r), \boldsymbol{\xi}^{-1}\big) \frac{t_1^{k_1}}{k_1!} \frac{t_2^{k_2}}{k_2!} \cdots \frac{t_r^{k_r}}{k_r!}$$

アイデア $\mu_{\boldsymbol{\xi}^{-1}}$, $\tilde{\mu}_c$ の 積測度 を "多重ゼータ関数のメラン変換っぽく" 積分すれば良いんじゃ?!

$$\boxed{\mu_{\boldsymbol{\xi}^{-1}} := \prod_{j=1}^{r} \mu_{\xi_j^{-1}}}$$

$\prod_{j=1}^{r} e^{(t_j+\ldots+t_r)x_j}$ を積分 $\left({}^\forall|t_k|_p < p^{-1/(p-1)}\right)$

※ $\xi_j \neq 1$ の位数が すべて p と素を仮定

$$\int_{\mathbb{Z}_p^r} \prod_{j=1}^{r} e^{(t_j+t_{j+1}+\ldots+t_r)x_j}\, d\mu_{\boldsymbol{\xi}^{-1}}$$
$$= \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{1 - \xi_j^{-1} e^{t_j+\ldots+t_r}} = \boxed{\mathfrak{H}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\xi}^{-1})}$$

… $\boxed{\mathfrak{B}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\xi}^{-1})}$ の母関数

特に "指数関数部分" を展開して係数を比較すると

$$\int_{\mathbb{Z}_p^r} \prod_{j=1}^{r} (x_1 + \ldots + x_j)^{k_j}\, d\mu_{\boldsymbol{\xi}^{-1}} = \boxed{\mathfrak{B}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\xi}^{-1})}$$

$(= (-1)^{r+|\boldsymbol{k}|}\zeta(-\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\xi}))$

[FKMT17b, Proposition 1.15]

$$\boxed{\hat{\mu}_{\boldsymbol{\xi}^{-1}z} := \prod_{j=1}^{r} \mu_{\xi_1^{-1}\cdots\xi_j^{-1}z}}$$

$\prod_{j=1}^{r} (x_1 + \ldots + x_j)^{k_j}$ を積分 $(\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^r)$

$|\xi_j^{-1}|_p \leq 1$ $(1 \leq {}^\forall j \leq r)$ を仮定

$$\int_{(\mathbb{Z}_p^r)'} \prod_{j=1}^{r} (x_1 + \ldots + x_j)^{-k_j}\, d\hat{\mu}_{\boldsymbol{\xi}^{-1}z} = \boxed{\ell_{\boldsymbol{k}}^{p,\star}(\boldsymbol{\xi}^{-1}; z)}$$

$(\mathbb{Z}_p^r)' := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_p^r \mid p \nmid (x_1 + \ldots + x_j) \text{ for } 1 \leq {}^\forall j \leq r\}$

$$\ell_{\boldsymbol{k}}^{p,\star}(\boldsymbol{\xi}; z) := \sum_{\substack{0 < n_1 \leq \ldots \leq n_r \\ p \nmid n_1, \ldots, p \nmid n_r}} \frac{\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \cdots \xi_r^{n_r}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \cdots n_r^{k_r}} z^{n_r}$$

p 進 リジッド捩れ多重スターポリログ関数

p-adic rigid twisted multiple star-polylogarithm

[FKMT17b, Definition 3.4]

$\{z \mid |z - (\xi_1 \cdots \xi_j)^{-1}|_p \geq 1\,(1 \leq {}^\forall j \leq r)\}$ 上の リジッド解析関数 [FKMT17b, Theorem 3.5]

※ $|\xi_j|_p = 1 (1 \leq {}^\forall j \leq r)$ なら 過収束 *overconvergent*

[FKMT17b, Theorem 3.21]

$\rightsquigarrow$ ξ を "動かして寄せ集める"　以下では $p \nmid c$ を仮定

$(\mu_c^r)' := \{\boldsymbol{\xi} \in \mu_c^r \mid \xi_j \neq 1 \text{ for } 1 \leq {}^\forall j \leq r\}$, $(\mu_c^r)'' := \{\boldsymbol{\xi} \in \mu_c^r \mid \xi_j\xi_{j+1}\cdots\xi_r \neq 1 \text{ for } 1 \leq {}^\forall j \leq r\}$

$$\boxed{\tilde{\boldsymbol{\mu}}_c := \sum_{\boldsymbol{\xi} \in (\mu_c^r)'} \mu_{\boldsymbol{\xi}^{-1}}}$$

"$\displaystyle\prod_{j=1}^{r}(x_1+\ldots+x_j)^{k_j}$ を積分したい"

$\displaystyle\prod_{j=1}^{r}(x_1+\ldots+x_j)^{-k_j}$ を積分　$(\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^r)$

$$\boxed{L_p(\boldsymbol{s}, \omega^{\boldsymbol{a}}; c) := \int_{(\mathbb{Z}_p^r)'} \prod_{j=1}^{r} \langle x_1+\ldots+x_j\rangle^{-s_j}\omega^{a_j}(x_1+\ldots+x_j)\, d\tilde{\boldsymbol{\mu}}_c}$$

p 進 多重 L 関数 [FKMT17b, Definition 1.16]

p-adic multiple L-function

※ c の部分の処理 が出来ていない!!

"補間公式"　[FKMT17b, Theorem 2.1]

… 積分領域 $(\mathbb{Z}_p^r)'$ が複雑ゆえ

"どエライこと" になっています

$$L_p(-\boldsymbol{k}, \omega^{\boldsymbol{k}}; c) = \int_{(\mathbb{Z}_p^r)'} \prod_{j=1}^{r}(x_1+\ldots+x_j)^{k_j}\, d\tilde{\boldsymbol{\mu}}_c$$

(一番積分がシンプルなケース)

$$= \int_{\mathbb{Z}_p^r} \prod_{j=1}^{r}(x_1+\ldots+x_j)^{k_j} \times \prod_{i=1}^{r}\underline{\left(1-\frac{1}{p}\sum_{\rho_i^p=1}\rho_i^{x_1+\ldots+x_i}\right)} \prod_{\boldsymbol{\xi}\in(\mu_c^r)'} d\mu_{\boldsymbol{\xi}^{-1}}$$

= ......(展開して整理)

$$= \boxed{\sum_{\boldsymbol{\xi}\in(\mu_c^r)'} \mathfrak{B}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\xi}^{-1}) + \sum_{d=1}^{r}\left(-\frac{1}{p}\right)^d \sum_{\substack{\boldsymbol{\rho}\in\mu_p^r \\ 1\text{ でない成分は} \\ \text{高々 } d \text{ 個}}} \sum_{\boldsymbol{\xi}\in(\mu_c^r)'} \mathfrak{B}(\boldsymbol{k}, {}^{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{\xi}^{-1})}$$

$${}^{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{\xi}^{-1} := \left(\rho_j\rho_{j+1}\cdots\rho_r\xi_j^{-1}\right)_{j=1}^{r}$$

※ 上式の 下線部 は、積分範囲でない部分 (つまり或る $x_1+\ldots+x_j$ が p で割れる部分) を $\boxed{1-\frac{1}{p}\sum_{\rho^p=1}\rho^x = \begin{cases}1 & (p\nmid x \text{ のとき}) \\ 0 & (p \mid x \text{ のとき})\end{cases}}$ を用いて取り除くための項である (これが計算を非常にややこしくしている元凶)。

$$L_p(\boldsymbol{k}, \omega^{-\boldsymbol{k}}; c)$$

$\Big\|$ $L_{p,r}(\boldsymbol{s}, \omega^{-\boldsymbol{k}}; c)$ の定義

$$\int_{(\mathbb{Z}_p^r)'} \prod_{j=1}^{r}(x_1+\ldots+x_j)^{-k_j}\, d\tilde{\boldsymbol{\mu}}_c$$

$$= \sum_{\boldsymbol{\xi}\in(\mu_c^r)''} \int_{(\mathbb{Z}_p^r)'} \prod_{j=1}^{r}(x_1+\ldots+x_j)^{-k_j}\, d\hat{\mu}_{\boldsymbol{\xi}^{-1}}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{\xi}\in(\mu_c^r)''} \ell_{\boldsymbol{k}}^{p,\star}(\boldsymbol{\xi}^{-1}; 1)$$

$$= p^{-r}\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\{1,\ldots,p-1\}^r} \sum_{\substack{\boldsymbol{\xi}\in(\mu_c^r)'' \\ \boldsymbol{\rho}\in\mu_p^r}} \boldsymbol{\rho}^{-\boldsymbol{\alpha}} \boxed{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}^{p,\star,(a)}(\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\xi}^{-1}; 1)}$$

本質的に "級数表示 の比較"

※ $\boldsymbol{\rho}^{-\boldsymbol{\alpha}} := \prod_{j=1}^{r}\rho_j^{-\alpha_j}$, $\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\xi}^{-1} := (\rho_j\xi_j^{-1})_{j=1}^{r}$

[FKMT17b, Theorem 3.40]

$$= \boxed{\sum_{\boldsymbol{\xi}\in(\mu_c^r)'} \mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}^{p,\star,(a)}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}, \ldots, \frac{\xi_r}{\xi_{r-1}}, \frac{1}{\xi_r}; 1\right) + \sum_{d=1}^{r}\left(-\frac{1}{p}\right)^d \sum_{\substack{\boldsymbol{\rho}\in\mu_p^r \\ 1\text{ でない成分は} \\ \text{高々 } d \text{ 個}}} \sum_{\boldsymbol{\xi}\in(\mu_c^r)'} \mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}^{p,\star,(a)}(\widetilde{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\xi}^{-1}}; 1)}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\xi}^{-1}} := \left(\frac{\rho_j\xi_{j+1}}{\xi_j}\right)_{j=1}^{r} \quad (\xi_{r+1} := 1 \text{ とする})$$

[FKMT17b, Theorem 3.41]; "単なる書き換え"

$$\boxed{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}^{p,\star,(a)}(\boldsymbol{\xi}; z) := \sum_{0<n_1\leq\ldots\leq n_r} \frac{\xi_1^{n_1}\xi_2^{n_2}\cdots\xi_r^{n_r}}{n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}} z^{n_r}}$$

p 進 捩れ多重スターポリログ関数

p-adic twisted multiple star-polylogarithm

[FKMT17b, Definition 3.29]

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{(\xi_1\cdots\xi_j)^{-1} \text{ for } 1 \leq {}^\forall j \leq r, \infty\}$ 上のコールマン関数*19 (分枝 $a \in \mathbb{C}_p$ に依存)

[FKMT17b, Theorem-Definition 3.32]

※ $\boldsymbol{\xi} \in (\mu_c^r)''$ のときは 1 は "Log 極を持たない領域" 内にある (つまり特異点の剰余円盤に含まれない) ので 1 での値は well-defined

[FKMT17b, Proposition 3.34, Theorem-Definition 3.38]

*19 大抵の方が想像される通りのコールマン反復積分で構成します。[FKMT17b, Definition 3.29] で "答え合せ" しよう。

今後の展望・課題など 論文 [FKMT17b] は、彼等が構成した 非特異化オイラー–ザギエ型多重ゼータ関数 *desingularised multiple zeta function of* EULER–ZAGIER *type* $\zeta^{\mathrm{des}}(\boldsymbol{s})$ (屡々 $\zeta_{\mathrm{FKMT}}(s_1,\ldots,s_r)$ と書かれるもの; 小見山尚さんの講演およびレジュメも参照されたい) [FKMT17a, Definition 3.1] の 負の整数点での値を p 進補間する p 進解析的関数の構成 を目指したものである。実際、彼等の 非特異化法 は "$\zeta^{\mathrm{des}}(\boldsymbol{s}) = \lim_{c\to 1} \frac{1}{(c-1)^r} \sum_{\boldsymbol{\xi}\in(\mu_c^r)'} \zeta(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\xi})$" というイメージでなされていた [FKMT17a, Section 3 冒頭部] (もちろんこの極限が意味を持つように、実際にはメラン変換する母関数 $\mathfrak{H}(\boldsymbol{t})$ を 実数 c で "修正" したもの [FKMT17a, Definition 1.9] を用いて $\zeta^{\mathrm{des}}(\boldsymbol{s})$ を構成しているのだが)。したがって、前ページで構成した "$L_p(\boldsymbol{s};c) = \sum_{\boldsymbol{\xi}\in(\mu_c^r)'} L_p(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\xi}^{-1})$" のパラメータ c を $\mathbb{Z}_p$ に拡張し (このこと自体は、測度 $\tilde{\mu}_c$ のアミース変換で得られる冪級数 $g_c(T)$ のパラメータ c が "p 進補間可能" なことを用いて実現されている [FKMT17b, Theorem 1.24])、$\frac{1}{(c-1)^r}$ を掛けて $c\to 1$ なる極限を取れば、極限 "$L_p^{\mathrm{des}}(\boldsymbol{s},\omega^{\boldsymbol{a}})$" は構成から明らかに "$\zeta^{\mathrm{des}}(\boldsymbol{s})$ の p 進版" と呼ぶに相応わしい関数となるであろう。ところが、一般にこのような極限操作を実行すると p 進測度論の範疇から逸脱してしまう ため、そもそも所望の極限が存在するかどうかも明らかではなくなってしまう [FKMT17b, Problem 1.31]。また、仮にこの極限が (奇跡的にリジッド解析的な関数に) 収束したとしても、"$L_p^{\mathrm{des}}(\boldsymbol{s};\omega^{\boldsymbol{a}})$" は $\zeta(\boldsymbol{s})$ に 適当な因子を掛けたもの (或いは $\zeta(\boldsymbol{s})$ の 適当な線型和 を取って極を消したもの) である $\zeta^{\mathrm{des}}(\boldsymbol{s})$ の 負の整数点での特殊値を補間したもの、という位置付けになってしまうため、それがどのような 幾何的意味 (或いは 岩澤理論的意味) を持つかは未知数と言わざるを得ない。

とは言え、p 進多重 L 関数 と呼ぶに相応しいものの構成の道筋を (部分的にではあるが) 切り開いた [FKMT17b] の意義は非常に大きい。今後は [FKMT17b] の手法のさらなる改良 (特に パラメータ c を取り去る 方向への改良) や、別のアプローチからの "より良い" p 進多重 L 関数の構成などの研究が待たれよう。p 進多重 L 関数の研究はまだまだ黎明期真っ只中でやるべきことは沢山あるので、我こそはと思われる方は是非参戦しましょう *!!!*

コラム 久保田–レオポルト p 進 L 関数の原論文 [KL64] の構成について

歴史的には正確でないかもしれませんが、「p 進」世界 では "ゼータ関数の 正の整数点 での値"

$$“\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots\ldots”$$

よりも "ゼータ関数の 負の整数点 での値"

$$“\zeta(-k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-k}} = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots\ldots”$$

の方が ($|p|_p = p^{-1}$ という位相の入れ方のせいで) "収束しやすそう" だ、という素朴な観察こそが、恐らくは 「p 進」世界 での "ゼータ" が考察される切っ掛けであったのでしょう。実際、法

f のディリクレ指標 (簡単のため $p\,|\,f$ としておきましょう) に対して 「p 進」世界 では

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\chi(1)1^k+\chi(2)2^k+\ldots+\chi(fp^n)(fp^n)^k}{fp^n}=B_{\chi,k}=-kL(1-k,\chi)$$

という Witt の極限公式 が成り立ち、左辺は χ で捻った k 冪乗和の平均値の極限 となっています。この公式に基づいて、久保田富雄と Heinrich-Wolfgang Leopoldt は $U^{(1)}_{\mathbb{Z}_p}:=1+p\mathbb{Z}_p$ 上の解析的関数 F に対する線型汎関数

$$\mathfrak{M}^{(n)}_\chi(F):=\frac{1}{fp^n}\sum_{\substack{\alpha=1\\ p\nmid\alpha}}^{fp^n}\chi(\alpha)F(\langle\alpha\rangle)$$

が 線型汎関数としての極限 $\mathfrak{M}_\chi$ を持つ ことを示した上で ([KL64, Satz 1]; “χ-平均化作用素 *χ-Mittel*” と呼称されています)、“冪乗関数の χ-平均” $\boxed{L_p(s,\chi):=\frac{1}{s-1}\mathfrak{M}_\chi([u\mapsto u^{1-s}])}$ として 久保田–レオポルトの p 進 L 関数 Kubota–Leopoldt *p-adic L-function* と呼ばれる関数を構成することに成功しました。ただ、彼等の手法 [KL64] では完備群環の元として p 進 L 関数を実現出来ず、“有限指標の捻りでの補間” や岩澤理論への応用には向きません。そのことも手伝ってか、今日では [KL64] の手法はあまり顧みられていないように感じられます。しかし、彼等の構成は素朴なアイデアに基づいた非常に “分かり易い” もので、「p 進」世界 で “ゼータ” を構成する感覚を掴むにはうってつけではないでしょうか[*20]。数学の発展は日進月歩で、最先端の結果に最速で追いつくことが要求される厳しい時代にさしかかっています。そんな時代だからこそ “古典的” と呼ばれる文献に触れることで、また新たな発見に巡り会えるのではないかと思います。

参考文献

[Ak17] 赤木和真, *The integrality of p-adic multiple zeta values: joint work with M. Hirose, S. Yasuda*, 数理解析研究所講究録『多重ゼータ値の諸相』, **2015** (2017), 53–64.

[AHY] Kazuma Akagi, Minoru Hirose and Seidai Yasuda, *Integrality of p-adic multiple zeta values and a bound for the space of finite multiple zeta values*, preprint, in preparation.

[Bes02] Amnon Besser, *Coleman integration using the Tannakian formalism*, Math. Ann., **322**, Issue 1 (2002), 19–48.

[BdJ03] Amnon Besser and Rob de Jeu, *The syntomic regulator for K-theory of fields*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **36** (6) (2003), 867–924.

[BF06] Amnon Besser and Hidekazu Furusho, *The double shuffle relations for p-adic multiple zeta values*, in: *Primes and knots*, Contemp. Math., **416**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2006), 9–29.

[Cha17] Andre Chatzistamatiou, *On integrality of p-adic iterated integrals*, J. of Algebra, **474** (2017), 240–270.

[ChM] Chieh-Yu Chang and Yoshinori Mishiba, *Logarithmic Interpretation of Multiple Zeta Values in Positive Characteristic*, preprint (2017), available from the arXiv webpage: `https://arxiv.org/abs/1710.10849`.

*20 実際、何箇所かで [KL64] の構成について講演させていただく機会に恵まれましたが、解析数論など分野が離れた “非専門家” の方ほど「分かり易く明解な構成である」という印象を強く持たれるようです。

[Col82] Robert F. Coleman, *Dilogarithms, regulators and p-adic L-functions*, Invent. Math. **69**, no. 2 (1982), 171–208.

[CdS88] Robert F. Coleman and Ehud de Shalit, *p-adic regulators on curves and special values of p-adic L-functions*, Invent. Math., **93**, no. 2 (1988), 239–266.

[De89] Pierre Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, in: *Galois groups over* $\mathbb{Q}$, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **16**, Springer, New York (1989).

[De02] Pierre Deligne, *Periods for the fundamental group*, a short note on Arizona Winter School 2002, available from `http://swc.math.arizona.edu/aws/2002/02DeligneCD.pdf`.

[Fur03] 古庄英和, *Introduction to p-adic multiple zeta values* (日本語), 数理解析研究所講究録『代数的整数論とその周辺』, No. **1324** (2003), 33–46.

[Fur04] Hidekazu Furusho, *p-adic multiple zeta values* I. *p-adic multiple polylogarithms and the p-adic KZ equation*, Invent. Math., **155**, no. 2 (2004), 253–286.

[Fur07] Hidekazu Furusho, *p-adic multiple zeta values* II. *Tannakian interpretations*, Amer. J. Math., **129**, no. 4 (2007), 1105–1144.

[Fur16] 古庄英和著 (小谷久寿, 新甫洋史記述), 結び目と *Grothendieck–Teichmüller* 群, MI レクチャーノート, **68**, 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 (2016).

[FJ07] Hidekazu Furusho and Amir Jafari, *Regularization and generalized double shuffle relations for p-adic multiple zeta values*, Compos. Math., **143**, no. 5 (2007), 1089–1107.

[FKMT17a] Hidekazu Furusho, Yasushi Komori, Kohji Matsumoto and Hirofumi Tsumura, *Desingularization of complex multiple zeta-functions*, Amer. J. Math., **139**, no. 1 (2017), 147–173.

[FKMT17b] Hidekazu Furusho, Yasushi Komori, Kohji Matsumoto and Hirofumi Tsumura, *Fundamentals of p-adic multiple L-functions and evaluation of their special values*, Selecta Math. (N.S.) **23**, no. 1 (2017), 39–100.

[原田 SS2018] 原田遼太郎, KZ 方程式と KZ 結合子, 第 26 回整数論サマースクール『多重ゼータ値』講演レジュメ (2018).

[Jar] David Jarossay, *Indirect computation of p-adic cyclotomic multiple zeta values*, preprint (2015), available from the arXiv webpage: `https://arxiv.org/abs/1501.04893`.

[Ko79] Neal Koblitz, *A new proof of certain formulas for p-adic L-functions*, Duke Math. J., **46**, No. 2 (1979), 455–468.

[KL64] Tomio Kubota and Heinrich-Wolfgang Leopoldt, *Eine p-adische Theorie der Zetawerte* I: *Einführung der p-adischen Dirichletschen L-Funktionen*, J. Reine Angew. Math., **214/215** (1964), 328–339.

[Ta04] Tatsushi Tanaka, *A few applications of shuffle products for p-adic multiple zeta values*, Master Thesis at Kyushu University (2004).

[Ün13] Sinan Ünver, *Drinfel'd–Ihara relations for p-adic multi-zeta values*, J. Number Theor., **133** (2013), 1435–1483.

[Ya10] Go Yamashita, *Bounds for the dimensions of p-adic multiple L-value spaces*, Doc. Math. Extra volume: *Andrei A. Suslin sixtieth birthday* (2010), 687–723.