「多重ゼータ値」から「モチヴィック多重ゼータ値」へ

萩原 啓 (理化学研究所・慶應義塾大学)

0. 記号と約束事

- 記号 $\mathbb{N}, \mathbb{N}_+, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ非負整数、正整数、整数、有理数、実数、複素数の集合を表す。
- 本稿では環といえば単位的可換環のことを指し、環 R に対し R 代数と言えば R からの環準同型が指定された環のことを指す。
- 函手は常に共変なもののみを考える。圏 $\mathscr{C}$ から圏 $\mathscr{D}$ への反変函手を考えたいときは、反圏 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ からの函手を考える。
- 記号 $\mathfrak{H}$ は Hoffman 代数 $\mathbb{Q}\langle e_0, e_1\rangle$ を表す。これは、$\deg e_i = 1$ という次数付けによって次数付 $\mathbb{Q}$ 代数とみる。また、$\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{N}_+^r$ に対し $e_{\mathbf{k}} = e_1 e_0^{k_1-1} \ldots e_1 e_0^{k_r-1}$、$\mathrm{dep}(\mathbf{k}) = r$ とおく。
- 集合全体のなす圏を $\mathbf{Set}$ で表す。
- 体 K に対し $\mathbf{Vec}_K$、$\mathbf{Vec}_K^{\mathrm{fin}}$、$\mathbf{GrVec}_K$、$\mathbf{GrVec}_K^{\mathrm{fin}}$ でそれぞれ K ベクトル空間の圏、有限次元 K ベクトル空間の圏、次数付 K ベクトル空間の圏、次数付 K ベクトル空間で次数付けを忘れたときに有限次元であるようなものの圏を表す。また環 R に対し $\mathbf{Mod}_R$、$\mathbf{Alg}_R$、$\mathbf{AffSch}_{/R}$ で R 加群、R 代数、R 上のアフィンスキームの圏を表す。
- 次数付 K ベクトル空間と $\mathbb{G}_m$ 表現 (左からの K 線型作用) との同一視は「$r \in \mathbb{G}_m$ が r^n 倍で作用する部分」が次数 n となるようにする。
- 次数付 K ベクトル空間 $V = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} V_k$ に対し、$V^\circ = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} V_{-k}$ とおく。

1. 序

1.1. 目標. まず、2 つの自然数列を導入する。

定義. (1) 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し、ウェイト k の多重ゼータ値で $\mathbb{Q}$ 上生成される $\mathbb{R}$ の部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathcal{Z}_k$ と書く。その $\mathbb{Q}$ 上の次元を d'_k と書く。また、$\mathcal{Z}_\bullet = \oplus_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{Z}_k$ とおく。

(2) 数列 $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を $(1-t^2-t^3)^{-1} = \sum_{k\in\mathbb{N}} d_k t^k$ $(\in \mathbb{Z}[[t]])$ で定める。

本稿の目的は、以下の定理の、混合 Tate モチーフおよび $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ のモチーフ論的基本亜群をもちいた証明についてその概略を紹介することである:

定理 1.1. (Deligne, Goncharov, 寺杣) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し、不等式

$$d'_k \leq d_k$$

が成り立つ。

1.2. 証明の戦略および本稿の構成. 本稿では実際には以下の定理を示す:

定理 1.2. 以下の条件を満たすような次数付 $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathscr{A}^{\mathrm{MT}}$ および $\mathscr{H}$、次数付 $\mathbb{Q}$ 代数準同型 $\zeta^{\mathrm{mot}} : \mathfrak{H} \to \mathscr{H}$、環準同型 $\mathrm{per} : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ が存在する:

(1) 次数付 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間として、$\mathscr{A}^{\mathrm{MT}}$ は $\{x_{2k+3} \mid k \in \mathbb{N}\}$ 上自由に生成された非可換 $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathbb{Q}\langle x_3, x_5, \ldots\rangle$ に同型である。ここで $\deg x_i = i$ とする。

(2) 図式

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{H} \arrow[rr, "\zeta^{\mathrm{an}}"] \arrow[dr, "\zeta^{\mathrm{mot}}"'] & & \mathbb{C} \\ & \mathscr{H} \arrow[ur, "\mathrm{per}"'] & \end{tikzcd}$$

は可換である。ここで ζ^{an} は $e_{\mathbf{k}}$ に $(-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}\zeta(\mathbf{k})$ を対応させる $\mathbb{Q}$ 代数準同型である。

(3) 次数付 $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathscr{H}$ は、
  (a) 整域であり、
  (b) 2 次の部分 $\mathscr{H}_2$ が 1 次元 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間であり、
  (c) 次数付 $\mathbb{Q}$ 代数としての同型 $\mathscr{H}/(\mathscr{H}_2) \cong \mathscr{A}^{\mathrm{MT}}$ を持つ (ここで左辺の分母は $\mathscr{H}_2$ で生成されるイデアルを表す)。

特に、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の完全系列

$$0 \to \mathscr{H}_{k-2} \to \mathscr{H}_k \to \mathscr{A}_k^{\mathrm{MT}} \to 0$$

が存在する。

まずは、この定理からどのようにして定理 1.1 が従うかを見る。その為に記号を 2 つ導入する。

定義. (1) 次数付 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $V = \oplus_{k\in\mathbb{N}} V_k$ に対し、冪級数 $H_V(t) \in \mathbb{Z}[[t]]$ を

$$H_V(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (\dim_{\mathbb{Q}} V_k)\, t^k$$

と定める。

(2) 実係数の冪級数 $f, g \in \mathbb{R}[[t]]$ に対し、$f-g$ の全ての係数が 0 以上であることを $f \gg g$ と表す。

さて、定理 1.2 を認めると不等式列

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{Z}_\bullet}(t) \ \ll\ H_{\mathrm{Image}\,\zeta^{\mathrm{mot}}}(t) \ \ll\ H_{\mathscr{H}}(t) &= H_{\mathscr{A}^{\mathrm{MT}}}(t)\cdot(1-t^2)^{-1} \\ &= \frac{1}{1-t^3-t^5-t^7-\cdots}\cdot\frac{1}{1-t^2} \\ &= \frac{1}{1-t^2-t^3} \end{aligned}$$

が得られ、これから定理 1.1 は直ちに従う。ここで、第 1、第 2 の不等式は定理 1.2 (2) の可換性から、第 3 の等式は定理 1.2 (3) の最後の注意から、第 4 の等式は定理 1.2 (1) からの帰結である。

註 1.3. (1) 定理 1.2 に現れる各代数に関して幾つかコメントする。
  (a) 環 $\mathscr{A}^{\mathrm{MT}}$ は「混合 Tate モチーフのなす淡中圏の淡中基本群」(の冪単部分) の関数環であり、純粋にモチーフ論的な対象である。
  (b) 環 $\mathscr{H}$ は「Betti-de Rham 捻子」の関数環の部分代数であり、これはモチーフの Betti 実現と de Rham 実現との「ずれ」を統率する対象である。また、準同型 per はその「ずれ」を周期として取り出す写像である。
  (c) 環 $\mathfrak{H}$ は本稿の枠組みにおいては「$\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ の de Rham 的基本 (亜) 群」(実際にここで用いるのはパス空間) の関数環として解釈され、ζ^{mot} は「Betti 実現における 0 から 1 へのパスとのペアリング」から得られる写像である。

(2) 環 $\mathscr{H}$ の元 $(-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}\zeta^{\mathrm{mot}}(e_{\mathbf{k}})$ は、$\zeta(\mathbf{k})$ に移されることからも分かるように、多重ゼータ値の「モチーフ論的持ち上げ」、すなわち「モチヴィック多重ゼータ値」というべきものであり、ζ^{mot} の核は「モチヴィック多重ゼータ値の関係式」の集合というべきものである。

(3) 上の証明における第 2 の不等式は、実は等式であることが Francis Brown によって証明されている。第 1 の不等式も等式であると期待されているものの、通常の多重ゼータ値とモチヴィック多重ゼータ値との関係を扱う超越数論的な箇所であり、現時点では (おそらく) ほとんど何も知られていない。

さて、次節以降では定理 1.2 の証明について解説していく。まず第 2 節では「混合 Tate モチーフの圏」を導入しその性質を用いて (1) を導く。次に第 3 節では「$\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ のモチーフ論的パス空間」と「Betti-de Rham 捻子」を用いて次数付 $\mathbb{Q}$ 代数 $\widetilde{\mathscr{H}}$、次数付 $\mathbb{Q}$ 代数準同型 $\zeta^{\mathrm{mot}} : \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathscr{H}}$ 及び環準同型 $\mathrm{per} : \widetilde{\mathscr{H}} \to \mathbb{C}$ を構成し、(2) の可換図式の類似 ($\mathscr{H}$ を $\widetilde{\mathscr{H}}$ で置き換えたもの) が成り立つことを示す。最後に第 4 節で、$\widetilde{\mathscr{H}}$ の部分代数として $\mathscr{H}$ を構成し、それが (2) の可換図式を誘導することと (3) の諸性質を示す。

2. 混合 Tate モチーフの圏とその淡中群

本稿における定理 1.2 の証明の鍵の一つは、「混合 Tate モチーフの圏」の存在である。一般に、「混合モチーフの圏」なる数論幾何学的に自然な、かつ望ましい様々な性質をみたす圏

の存在が信じられているが、現時点ではそのような圏は、さらに深い予想を認めた上でなければ、存在が証明されていない。しかし、そのごく一部分である「$\mathbb{Z}$ 上の混合 Tate モチーフの圏」については、いかなる予想も認めることなくその存在が示されている。ここでは公理的にその圏の存在について述べることにする。

2.1. **本節の主定理 - 混合 Tate モチーフの圏の存在.** まず、佐久川氏の講演で導入されたように、$\mathbb{Q}(1)_{\mathrm{B}} = 2\pi i\,\mathbb{Q} \in \mathbf{Vec}^{\mathrm{fin}}_{\mathbb{Q}}$、$\mathbb{Q}(1)_{\mathrm{dR}} = \mathbb{Q} \in \mathbf{GrVec}^{\mathrm{fin}}_{\mathbb{Q}}$ (次数 1) であったことを思い出しておく。

定理 2.1. 6 つ組 $(\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(1), \widetilde{\omega}_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}}, \mathrm{comp}, F_\infty)$ であって以下の条件をみたすものが存在する:

(1) (a) $\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{Q}$ 線型 Abel テンソル圏で $\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(1)$ はその可逆な対象。
  (b) $\widetilde{\omega}_{\mathrm{dR}} : \mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}} \to \mathbf{GrVec}^{\mathrm{fin}}_{\mathbb{Q}}$ および $\omega_{\mathrm{B}} : \mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}} \to \mathbf{Vec}^{\mathrm{fin}}_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ 線型テンソル函手。
  (c) $\mathrm{comp} : \omega_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbb{C} \overset{\cong}{\to} \omega_{\mathrm{B}} \otimes \mathbb{C}$ は $\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}$ から $\mathbf{Vec}^{\mathrm{fin}}_{\mathbb{C}}$ へのテンソル函手間の自然同型。ここで、ω_{dR} は、$\widetilde{\omega}_{\mathrm{dR}}$ に忘却函手 $\mathbf{GrVec}^{\mathrm{fin}}_{\mathbb{Q}} \to \mathbf{Vec}^{\mathrm{fin}}_{\mathbb{Q}}$ を合成したものである。
  (d) $F_\infty : \omega_{\mathrm{B}} \to \omega_{\mathrm{B}}$ は $\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}$ から $\mathbf{Vec}^{\mathrm{fin}}_{\mathbb{Q}}$ へのテンソル函手間の自然同型。

(2) 圏 $\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}$ は函手 ω_{B} および ω_{dR} をファイバー函手とする $\mathbb{Q}$ 線型ニュートラル淡中圏である。

(3) $\omega_{\mathrm{B}}(\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(1)) = \mathbb{Q}(1)_{\mathrm{B}}$、$\widetilde{\omega}_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(1)) = \mathbb{Q}(1)_{\mathrm{dR}}$ であり、自然同型が誘導する同型 $\mathrm{comp} : \omega_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(1)) \otimes \mathbb{C} \to \omega_{\mathrm{B}}(\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(1)) \otimes \mathbb{C}$ は、以下の図式を可換にする:

$$\begin{tikzcd}
\omega_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(1)) \otimes \mathbb{C} \arrow[rr, "\mathrm{comp}", "\cong"'] \arrow[d, "="'] & & \omega_{\mathrm{B}}(\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(1)) \otimes \mathbb{C} \arrow[d, "="] \\
\mathbb{Q} \otimes \mathbb{C} \arrow[r, "\mathrm{mult}"] & \mathbb{C} & 2\pi i\,\mathbb{Q} \otimes \mathbb{C}, \arrow[l, "\mathrm{mult}"']
\end{tikzcd}$$

ここで mult は掛け算から誘導される線形写像を表す。

(4) 自然数 i および整数 m、n に対し、拡大群 $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}}(\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(n), \mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(m))$ は、$(i = 0$ かつ $m = n)$ または $(i = 1$ かつ $m - n$ が 3 以上の奇数$)$ のとき $\mathbb{Q}$ で、それ以外のとき 0 となる。ここで、$\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(n)$ は、$n \geq 0$ のとき $\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(1)^{\otimes n}$、$n < 0$ のとき $\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(-n)^\vee$ と定義する。

(5) 全ての $\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}$ の対象 M に対し、偶数で添字付けられた増大フィルトレーション、即ち $\cdots \subset W_{2m}M \subset W_{2m+2}M \subset \cdots$ なる M の部分対象の列で次の条件を満たすものが存在する:
  (a) 十分大きな偶数 i に対して $W_iM = M$、十分小さな偶数にたいして $W_iM = 0$ となる。
  (b) 部分商 $\mathrm{Gr}^W_{-2n}M = W_{-2n}M/W_{-2n-2}M$ は、$\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(n)$ の有限直和に同型である。
  (c) 自然な射 $\widetilde{\omega}_{\mathrm{dR}}(W_{-2n}M) \to \widetilde{\omega}_{\mathrm{dR}}(M)$ は同型 $\widetilde{\omega}_{\mathrm{dR}}(W_{-2n}M) \cong W_{-2n}\widetilde{\omega}_{\mathrm{dR}}(M)$ を誘導する。ここで、右辺は $\oplus_{m \geq n}\widetilde{\omega}_{\mathrm{dR}}(M)_m$ と定義する。

(6) $F_\infty^2 = \mathrm{Id}_{\omega_{\mathrm{B}}}$ であり、図式

$$\begin{tikzcd}
\omega_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbb{C} \arrow[rr, "\mathrm{Id}\otimes\mathrm{conj}"] \arrow[d, "\mathrm{comp}"'] & & \omega_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbb{C} \arrow[d, "\mathrm{comp}"] \\
\omega_{\mathrm{B}} \otimes \mathbb{C} \arrow[r, "F_\infty\otimes\mathrm{Id}"'] & \omega_{\mathrm{B}} \otimes \mathbb{C} \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes\mathrm{conj}"'] & \omega_{\mathrm{B}} \otimes \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

は可換である。ここで conj は複素共役写像である。

定義. 定理の圏 $\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}$ を **$\mathbb{Z}$ 上の混合 Tate モチーフの圏 (The category of mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$)**、函手 ω_{B}、ω_{dR} をそれぞれ **Betti 実現 (Betti realisation)**、**de Rham 実現 (de Rham realisation)**、自然同型 comp を**比較同型 (comparison isomorphism)** とよぶ。

練習 2.2. 以下を証明せよ。

(1) 同型 $F_\infty(\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(n)) : \mathbb{Q}(n)_{\mathrm{B}} \to \mathbb{Q}(n)_{\mathrm{B}}$ は $(-1)^n$ 倍写像である。
(2) 対象 $\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(n)$ は、$W_{-2n}\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(n) = \mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(n)$、$W_{-2n-2}\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(n) = 0$ をみたす。
(3) 部分対象の列 $(W_{-2n}M)_{n\in\mathbb{Z}}$ は条件 *(5-a)*、*(5-b)* で一意に定まる。

(4) 圏 $\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}$ における射 $f : M \to N$ に対し、$f|_{W_iM} : W_iM \to N$ は W_iN を経由し、同型 $f(W_iM) \cong f(M) \cap W_iN$ を誘導する。

2.2. **定理 2.1 の帰結.** 以下では、この定理を認めた上で、定理 1.2 (1) の証明の概略を述べる。まず、$\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}$ が淡中圏であることから以下の定義が意味を持つ:

定義. アフィン群スキーム G_{dR} を $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega_{\mathrm{dR}})$ と定義する。

さて、各 $\mathbb{Q}$ 代数 $R \in \mathbf{Alg}_{\mathbb{Q}}$ およびテンソル函手間の射 $\xi \in \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_{\mathrm{dR}} \otimes R)$ に対し、$\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(-1)$ を代入することで $\mathbf{Mod}_R$ の同型

$$\xi(\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(-1)) : \omega_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(-1)) \otimes R \xrightarrow{\cong} \omega_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(-1)) \otimes R$$

が得られるが、定理 2.1 の条件 (3) より $\omega_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(-1)) \otimes R$ は R 上階数 1 の自由加群であるので、$R^{\times}$ の元 r が対応する。この対応は R に関して函手的である。

定義. 上の対応 "$\xi \mapsto r$" によって定まる $\mathbb{Q}$ 上のアフィン群スキームの準同型 $G_{\mathrm{dR}} \to \mathbb{G}_m$ を $\mathrm{ev}_{\mathbb{Q}(-1)}$ と表す。また、核 $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{ev}_{\mathbb{Q}(-1)})$ を U_{dR} とおく。

一方、各 $R \in \mathbf{Alg}_{\mathbb{Q}}$ および $r \in R^{\times}$、$M \in \mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}$ に対し、$\widetilde{\omega}_{\mathrm{dR}}(M) \otimes R$ が次数付 R 加群の構造をもつので「次数 n の部分は r^n 倍する」という $\omega_{\mathrm{dR}}(M) \otimes R$ の R 加群の自己同型が定義できる。これは M について函手的なので、$\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}$ から $\mathbf{Mod}_R$ への函手 $\omega_{\mathrm{dR}} \otimes R$ の自然自己同型を定める。さらにこれはテンソル函手の間の射になっているので、群 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_{\mathrm{dR}} \otimes R)$、すなわち $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega_{\mathrm{dR}})(R)$ の元 ξ を定める。これは R に関して函手的である。

定義. 上の対応 "$r \mapsto \xi$" によって得られる $\mathbb{Q}$ 上のアフィン群スキームの準同型 $\mathbb{G}_m \to G_{\mathrm{dR}}$ を τ とおく。容易に分かるように、$\mathrm{ev}_{\mathbb{Q}(-1)} \circ \tau = (-)^{-1}$ が成り立つ。

さて、"$(r, u) \mapsto \tau(r)^{-1} \circ u \circ \tau(r)$" によって群 $\mathbb{G}_m$ は U_{dR} へ右から作用し、$\mathcal{O}(U_{\mathrm{dR}})$ へは左から作用する。したがって $\mathcal{O}(U_{\mathrm{dR}})$ は自然に次数付 $\mathbb{Q}$ 代数となる。

定義. 次数付 $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathcal{O}(U_{\mathrm{dR}})^{\circ}$ を $\mathscr{A}^{\mathrm{MT}}$ と書く。

以下は容易に確かめられる:

命題 2.3. アフィン群スキームの同型 $U_{\mathrm{dR}} \rtimes \mathbb{G}_m \cong G_{\mathrm{dR}}$ が存在する。

さて、定理 2.1 を認めた上で定理 1.2 (1) の証明の概略を述べる。まず、群 U_{dR} は定義より各 $\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$ へ自明に作用するので、定理 2.1 (5) より $\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}$ の任意の対象に対して冪単に作用する。このことより U_{dR} が副冪単代数群となることが分かる。

次に、Lie 代数 $\mathrm{Lie}\, U_{\mathrm{dR}}$ を考えると、これにも自然に $\mathbb{G}_m$ の作用が誘導されるので、固有空間の部分のみを取って $\mathfrak{u}_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{gr}} = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} (\mathrm{Lie}\, U_{\mathrm{dR}})_n$ と "離散化"すると、これは "擬冪零 Lie 代数"とよばれる冪零 Lie 代数の無限次元版のようなものになる。

一方、誘導表現および制限に関して、

$$\mathrm{Res}_{U_{\mathrm{dR}}}^{G_{\mathrm{dR}}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}、\qquad \mathrm{Ind}_{U_{\mathrm{dR}}}^{G_{\mathrm{dR}}}(\mathbb{Q}) = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Q}_{\mathrm{rep}}(n)$$

($\mathbb{Q}_{\mathrm{rep}}(n)$ は $\mathbb{G}_m$ を経由して n 乗倍で作用する G_{dR} の 1 次元表現) が成り立つので、淡中圏の一般論と代数群の簡単な議論から、Lie 代数コホモロジーと $\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}$ における拡大群との同型

$$H^i(\mathfrak{u}_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{gr}}, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}}(\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(n), \mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(0))$$

が得られる。

この右辺は、定理 2.1 (4) によって $i \geq 2$ のとき 0 で $i = 1$ のとき (次数付 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間として)$\oplus_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_{-2m-3}$ と同型になる ($\mathbb{Q}_n$ は単に $\mathbb{Q}$ のコピーである)。

すると、Lie 代数コホモロジーを用いた擬冪零 Lie 代数の構造に関する定理から $\mathfrak{u}_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{gr}}$ は $\oplus_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_{2m+3}$ で生成される自由 Lie 群となることが分かり、$\mathcal{O}(U_{\mathrm{dR}})$ が次数付普遍包絡代数 $\mathscr{U}(\mathfrak{u}_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{gr}})$ の双対の (上と同じ意味での)"離散化"であることから定理 1.2 (1) が従う。

註 2.4. ここで、佐久川氏の講演との関係について触れておく。与えられたデータから自然にテンソル函手

$$\omega_{\mathrm{H}} : \mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathrm{MHT}_{\mathbb{Q}}$$

が、それぞれからの ω_{dR} と両立するよう定義でき、これがアフィン群スキームの全射準同型 $G_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{H}} \to G_{\mathrm{dR}}$ を誘導することが確かめられる。

3. $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ のモチーフ論的パス空間

3.1. ここまでのまとめ及び本節の主定理. 山本氏の講演では、$\mathbb{Q}$ 代数 ${}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}}^{\mathrm{B}}$、${}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}}$、およびそれらの間の $\mathbb{C}$ 代数同型 $\mathrm{comp}^{A}_{\mathrm{B,dR}} : {}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}} \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} {}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}}^{\mathrm{B}} \otimes \mathbb{C}$ が構成され、これらは

- $\pi(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0,1,\infty\}; \mathbf{1}, \mathbf{0}) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_{\mathbb{Q}}}({}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}}^{\mathrm{B}}, \mathbb{Q})$ および、
- 「0 から 1 へのパス」$\mathrm{dch} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_{\mathbb{Q}}}({}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}}^{\mathrm{B}}, \mathbb{Q})$ に対し、

$$((\mathrm{dch} \otimes \mathbb{C}) \circ \mathrm{comp}^{A}_{\mathrm{B,dR}})(\omega(\mathbf{k})) = (-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}\zeta(\mathbf{k})$$

という性質を持っていたことを思い出しておく (佐久川氏の記事の例 2.3 (2) も参照せよ)。

以下では、$\deg \omega_0 = \deg \omega_1 = -1$ によって ${}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}}$ は次数付 $\mathbb{Q}$ 代数と思うことにする。なおこのとき、対応 $e_{\mathbf{k}} \leftrightarrow \omega(\mathbf{k})$ によって $\mathfrak{H}^{\circ} = {}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}}$ という同一視ができることに注意しておく。

定義. アフィンスキーム $\mathrm{Spec}\, {}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}}^{\mathrm{B}}$ を ${}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{B}}$、圏 $\mathbf{GrVec}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{fin}}$ におけるアフィンスキーム $\mathrm{Spec}\, {}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}}$ を ${}_{\mathbf{1}}\widetilde{\Pi}_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}}$、また ${}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}}$ の次数付を忘れて (通常の) アフィンスキームと思ったものを ${}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}}$ と書く (記法については付録参照)。 環 ${}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}}$ は次数付けられているので、${}_{\mathbf{1}}\widetilde{\Pi}_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}}$ は $\mathbb{G}_m$ の自然な右作用をもつことに注意。

定理 1.2 の証明における鍵の一つは、これらが実は「モチーフの圏から来る」ことである。定理を正確に述べる前に、第 2 節の帰結として、

- Betti 実現 $\omega_{\mathrm{B}} : \mathbf{AffSch}(\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}) \longrightarrow \mathbf{AffSch}_{/\mathbb{Q}}$、
- de Rham 実現 $\widetilde{\omega}_{\mathrm{dR}} : \mathbf{AffSch}(\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}) \longrightarrow \mathbf{AffSch}(\mathbf{GrVec}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{fin}})$、および
- 比較同型 $\mathrm{comp} : \omega_{\mathrm{B}} \times \mathrm{Spec}\, \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \omega_{\mathrm{dR}} \times \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}$

が得られることを注意しておく。

定理 3.1. 圏 $\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}$ におけるアフィンスキーム ${}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{mot}}$ で次を満たすものが存在する：

(1) 同型 $\omega_{\mathrm{B}}({}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{mot}}) \cong {}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{B}}$ および
(2) 同型 $\widetilde{\omega}_{\mathrm{dR}}({}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{mot}}) \cong {}_{\mathbf{1}}\widetilde{\Pi}_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}}$

が存在し、自然同型が誘導する同型

$$\mathrm{comp} : \omega_{\mathrm{B}}({}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{mot}}) \times \mathrm{Spec}\, \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \omega_{\mathrm{dR}}({}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{mot}}) \times \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}$$

は (これらの同型を通じて)

$$\mathrm{Spec}\,(\mathrm{comp}^{A}_{\mathrm{B,dR}}) : {}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{B}} \times \mathrm{Spec}\, \mathbb{C} = \mathrm{Spec}\,({}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}}^{\mathrm{B}} \otimes \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Spec}\,({}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}} \otimes \mathbb{C}) = {}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}} \times \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}$$

に一致する。

系 3.2. 比較同型から誘導される同型 $\mathrm{comp} : {}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{B}}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} {}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}}(\mathbb{C})$ による dch の像は、同一視 ${}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}}(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_{\mathbb{Q}}}({}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}}, \mathbb{C})$ の下で、「$\omega(\mathbf{k})$ を $(-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}\zeta(\mathbf{k})$ に移す $\mathbb{Q}$ 代数準同型」となる。

3.2. Betti-de Rham 捻子とその "作用". 以下この節では、定理 3.1 を用いて定理 1.2 (2) の図式の構成の準備を始める。まず本小節では、Betti-de Rham 捻子を定義し、それがどのように ${}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{B}}$ と ${}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}}$ とを結び付けているかをみる。ここでは、${}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{mot}}$ の存在が不可欠であることに注意されたい。

定義. 記号 $\sharp, \flat$ は B または dR を表すとする。このときテンソル函手 $\omega_{\sharp}, \omega_{\flat} : \mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}} \to \mathbf{Vec}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{fin}}$ に対して $\mathbb{Q}$ 上のアフィンスキームを

$$P_{\flat,\sharp} = \underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega_{\sharp}, \omega_{\flat})$$

で定める。とくに $P_{\mathrm{B,dR}}$ を **Betti-de Rham 捻子 (Betti-de Rham torsor)** とよぶ。これは、$\tau(r) \in G_{\mathrm{dR}}$ ($r \in \mathbb{G}_m$) の右からの合成によって $\mathbb{G}_m$ の右作用をもつ。

さて、これを $\mathbf{Alg}_{\mathbb{Q}}$ から $\mathbf{Set}$ への函手とみて特に $\mathbb{Q}$ 代数として $\mathcal{O}(P_{\mathrm{B,dR}})$ を代入すると、

$$P_{\mathrm{B,dR}}(\mathcal{O}(P_{\mathrm{B,dR}})) = \mathrm{Isom}^{\otimes}(\omega_{\mathrm{dR}} \otimes \mathcal{O}(P_{\mathrm{B,dR}}), \omega_{\mathrm{B}} \otimes \mathcal{O}(P_{\mathrm{B,dR}}))$$

となるが、左辺には $\mathrm{Id}_{\mathcal{O}(P_{\mathrm{B,dR}})}$ に対応する普遍的な元があるので対応する右辺の元、すなわち標準的な自然同型

$$\mathrm{can} : \omega_{\mathrm{dR}} \otimes \mathcal{O}(P_{\mathrm{B,dR}}) \xrightarrow{\cong} \omega_{\mathrm{B}} \otimes \mathcal{O}(P_{\mathrm{B,dR}})$$

を得る。

これは、$\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}$ から $\mathbf{Mod}_{\mathcal{O}(P_{\mathrm{B,dR}})}$ への函手間の自然同型であるので、$\mathbf{AffSch}(\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}})$ から $\mathbf{AffSch}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{O}(P_{\mathrm{B,dR}})})$ への函手間の自然同型

$$\mathbf{AffSch}(\mathrm{can}) : \mathbf{AffSch}(\omega_{\mathrm{B}}) \times \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}(P_{\mathrm{B,dR}})) \xrightarrow{\cong} \mathbf{AffSch}(\omega_{\mathrm{dR}}) \times \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}(P_{\mathrm{B,dR}}))$$

を誘導する。

これに定理 3.1 の ${}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{mot}}$ を代入してその条件 (1)、(2) も考慮すると、$\mathbb{Q}$ 上のアフィンスキームの射

$$\mathbf{AffSch}(\mathrm{can})({}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{mot}}) : {}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{B}} \times P_{\mathrm{B,dR}} \xrightarrow{\cong} {}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}} \times P_{\mathrm{B,dR}}$$

が得られ、これと第 1 成分への射影を合成して、$\mathbb{Q}$ 上のアフィンスキームの射

$$\mathrm{can} : {}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{B}} \times P_{\mathrm{B,dR}} \longrightarrow {}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}}$$

が得られる。

練習 3.3. 上の写像 can は各 $R \in \mathbf{Alg}_{\mathbb{Q}}$ に対して写像

$$\mathrm{can}(R) : {}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{B}}(R) \times P_{\mathrm{B,dR}}(R) \longrightarrow {}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}}(R)$$

を誘導するが、これによる $(\alpha, \xi) \in {}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{B}}(R) \times P_{\mathrm{B,dR}}(R)$ の像は以下の元と一致することを示せ*:*

「$\xi \in P_{\mathrm{B,dR}}(R)$ に対応する自然同型 $\omega_{\mathrm{dR}} \otimes R \to \omega_{\mathrm{B}} \otimes R$ に ${}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{mot}} \in \mathbf{AffSch}(\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}})$ を代入して得られるアフィンスキーム間の射 ${}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{B}} \times \mathrm{Spec}\,R \to {}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}} \times \mathrm{Spec}\,R$ から誘導される写像 ${}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{B}}(R) \to {}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{B}}(R)$ による α の像」

3.3. **図式の構成.** さて、${}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{B}}(\mathbb{Q})$ には「0 から 1 へのパス」に対応する元 dch が存在したので、これによる評価写像を考えて $\mathbb{Q}$ 上のアフィンスキームの射

$$\mathrm{ev}_{\mathrm{dch}} : P_{\mathrm{B,dR}} \longrightarrow {}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}}$$

が得られる。容易に分かるように、これは $\mathbb{G}_m$ 同変である。

さらに、$P_{\mathrm{B,dR}}(\mathbb{C}) = \mathrm{Isom}^{\otimes}\,(\omega_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbb{C}, \omega_{\mathrm{B}} \otimes \mathbb{C})$ には、比較同型写像に対応する元 comp が存在するので、これの $\mathrm{ev}_{\mathrm{dch}}$ による像を $\mathrm{dch}^{\mathrm{dR}}$ とする。これは ${}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}}(\mathbb{C})$ の元となる。

さて、定義より圏 $\mathbf{AffSch}_{/\mathbb{Q}}$ における図式

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \arrow[dl, "\mathrm{comp}"'] \arrow[dr, "\mathrm{dch}^{\mathrm{dR}}"] & \\ P_{\mathrm{B,dR}} \arrow[rr, "\mathrm{ev}_{\mathrm{dch}}"'] & & {}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}} \end{tikzcd}$$

は可換であるので、対応して圏 $\mathbf{Alg}_{\mathbb{Q}}$ における可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{H}^{\circ} = \mathcal{O}({}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}}) \arrow[rr, "(\mathrm{ev}_{\mathrm{dch}})^*"] \arrow[dr, "(\mathrm{dch}^{\mathrm{dR}})^*"'] & & \mathcal{O}(P_{\mathrm{B,dR}}) \arrow[dl, "\mathrm{comp}^*"] \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

を得る。

補題 3.4. 写像 $(\mathrm{dch}^{\mathrm{dR}})^*$ ($=\zeta^{\mathrm{an}}$ と書く) は $e_{\mathbf{k}}$ を $(-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}\zeta(\mathbf{k})$ に移す。

証明. 元 $(\mathrm{dch}^{\mathrm{dR}})^* \in {}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{dR}}(\mathbb{C})$ は定義により、can による $(\mathrm{dch}, \mathrm{comp}) \in {}_{\mathbf{1}}\Pi_{\mathbf{0}}^{\mathrm{B}}(\mathbb{C}) \times P_{\mathrm{B,dR}}(\mathbb{C})$ の像であるが、一方これは、系 3.2 および練習 3.3 より「$e_{\mathbf{k}}$ を $(-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}\zeta(\mathbf{k})$ に移す $\mathbb{Q}$ 代数準同型」である。 □

定義. 次数付 $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathcal{O}(P_{\mathrm{B,dR}})^{\circ}$ を $\widetilde{\mathscr{H}}$、次数付 $\mathbb{Q}$ 代数準同型 $(\mathrm{ev}_{\mathrm{dch}})^*$ を ζ^{mot}、環準同型 comp^* を per とかく。

これで、定理 1.2 (2) において $\mathscr{H}$ を $\widetilde{\mathscr{H}}$ に置き換えた可換図式が得られた。

註 3.5. ここで再び、佐久川氏の講演との関係について触れておく (註 2.4 も参照せよ)。函手 ω_{H} はアフィンスキーム間の射 $-\circ\omega_{\mathrm{H}} : P^{\mathrm{H}}_{\mathrm{B,dR}} \to P_{\mathrm{B,dR}}$ を誘導し、従って環準同型 $\omega^*_{\mathrm{H}} : \mathcal{O}(P_{\mathrm{B,dR}}) \to \mathcal{O}(P^{\mathrm{H}}_{\mathrm{B,dR}})$ を誘導する。上で構成した図式は、この準同型を以下の様に経由する:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H} \arrow[rr, "\zeta^{\mathrm{an}}"] \arrow[dr, "\zeta^{\mathrm{mot}}"'] & & \mathbb{C} \\
& \widetilde{\mathscr{H}} \arrow[ur, "\mathrm{comp}^*"] \arrow[r, "\omega^*_{\mathrm{H}}"'] & \mathcal{O}(P^{\mathrm{H}}_{\mathrm{B,dR}})^{\circ} \arrow[u, "\mathrm{comp}^*_{\mathrm{H}}"']
\end{tikzcd}$$

(ここで $\mathrm{comp}^*_{\mathrm{H}}$ は、佐久川氏の原稿における comp^* である)。なお、左上から右下へ行く射が佐久川氏の講演における ζ^{H} に対応し、従って $\zeta^{\mathrm{mot}}(\mathbf{k})$ は ω^*_{H} によって $\zeta^{\mathrm{H}}(\mathbf{k})$ に移される。

4. Betti-de Rham 捻子およびその変種の幾何学

ここでは定理 1.2 (2) および (3) を示す。第 3 節においては Betti-de Rham 捻子 $P_{\mathrm{B,dR}}$ の関数環として $\widetilde{\mathscr{H}}$ を導入したが、実際はこの環でもまだ大きすぎて所望の不等式を得ることができない。そこで本節では $P_{\mathrm{B,dR}}$ の変種を構成し、その関数環として $\mathscr{H}$ を定義する。これが実は自然に $\widetilde{\mathscr{H}}$ の部分環になること、および ζ^{mot} の像を含むことが分かり、またその環論的諸性質が幾何学的議論から分かる。

4.1. 準備 - $\mathscr{H}$ の構成.

定義. (1) 圏 $\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}$ の対象 M が $W_{-2}M = 0$ を満たすとき、**有効 (effective)** であるとよぶ。有効な対象全体からなる $\mathrm{MTM}_{/\mathbb{Z}}$ の充満部分圏を $\mathrm{MTM}^{\mathrm{eff}}_{/\mathbb{Z}}$ と書く。また、$\natural \in \{\mathrm{B}, \mathrm{dR}\}$ に対し、函手 $\omega_\natural$ の $\mathrm{MTM}^{\mathrm{eff}}_{/\mathbb{Z}}$ への制限を $\omega^{\mathrm{eff}}_\natural$ と書く。

(2) 記号 $\sharp$、$\flat$ は B または dR であるとする。このとき、
  (a) 函手 $\omega^{\mathrm{eff}}_\sharp$ から函手 $\omega^{\mathrm{eff}}_\flat$ へのテンソル函手間の射全体のなすアフィンスキーム $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega^{\mathrm{eff}}_\sharp, \omega^{\mathrm{eff}}_\flat)$ を $\overline{P}_{\flat,\sharp}$ と書く。
  (b) アフィンスキーム $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}_\sharp(-1), \mathbb{Q}_\flat(-1)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}$ を単に $H_{\flat,\sharp}$ と書く。
  (c) 自然変換 $\alpha : \omega^{\mathrm{eff}}_\sharp \to \omega^{\mathrm{eff}}_\flat$ に対して $\alpha(\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(-1))$ を対応させる写像から誘導されるアフィンスキーム間の射を $\mathrm{ev}_{\flat,\sharp} : \overline{P}_{\flat,\sharp} \to H_{\flat,\sharp}$、または単に ev と表し、($\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(-1)$ における) 評価写像とよぶ。
  (d) 零写像 $0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}_\sharp(-1), \mathbb{Q}_\flat(-1))$ に対応する $H_{\flat,\sharp}$ の閉点を $\mathbf{0}$ と書く。また、この点の $\mathrm{ev}_{\flat,\sharp}$ に関する引き戻しを $\partial P_{\flat,\sharp}$ と書く。

ここまでを図示すると以下のようになる。ここで 2 つの四角形はどちらもカルテシアンになっている。

$$\begin{tikzcd}
\partial P_{\flat,\sharp} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{P}_{\flat,\sharp} \arrow[d, "\mathrm{ev}"] & P_{\flat,\sharp} \arrow[l] \arrow[d] \\
\{\mathbf{0}\} \arrow[r] & H_{\flat,\sharp} & H_{\flat,\sharp} \setminus \{\mathbf{0}\} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

練習 4.1. 右の四角形がカルテシアンになることを示せ。

特に $(\flat, \sharp) = (\mathrm{B}, \mathrm{dR})$ の場合を考えると、$\overline{P}_{\mathrm{B,dR}}$ には $\tau(r) \in G_{\mathrm{dR}}$ $(r \in \mathbb{G}_m)$ の右からの合成によって $\mathbb{G}_m$ が右から作用、左からの合成によって $F_\infty \in \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega_{\mathrm{B}})$ が左から作用し、一方 $H_{\flat,\sharp}$ への $\mathbb{G}_m$ の右作用を逆数のスカラー倍、F_∞ の作用を -1 倍で定めると、$\mathrm{ev} : \overline{P}_{\mathrm{B,dR}} \to H_{\mathrm{B,dR}}$ はこれら 2 つの作用と可換になる。

定義. アフィンスキーム $\overline{P}_{\mathrm{B,dR}}$ の、作用 F_∞ による商アフィンスキームを $\overline{P}^{+}_{\mathrm{B,dR}}$ と書き、ev が誘導する $\mathbb{Q}$ 上のスキームの射 $\overline{P}^{+}_{\mathrm{B,dR}} \to \{\pm 1\} \backslash H_{\mathrm{B,dR}}$ を $\mathrm{ev}^{+}_{\mathrm{B,dR}}$ と書く。

また、$\mathbb{G}_m$ の左作用によって $\mathcal{O}(\overline{P}^{+}_{\mathrm{B,dR}})$ には自然な次数が付けられる。そこで次数付 $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathcal{O}(\overline{P}^{+}_{\mathrm{B,dR}})^{\circ}$ を $\mathscr{H}$ と書く。

註 4.2. (1) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}_\sharp(-1), \mathbb{Q}_\flat(-1))$ は 1 次元 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間、従って $H_{\flat,\sharp}$ はアフィン直線 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}$ と (非標準的に) 同型である。

(2) 自然な同型 $\mathcal{O}(\overline{P}^{+}_{\mathrm{B,dR}}) \cong \mathcal{O}(\overline{P}_{\mathrm{B,dR}})^{F_\infty=1}$ が存在する。ここで右辺は環 $\mathcal{O}(\overline{P}_{\mathrm{B,dR}})$ の F_∞ 不変元全体を表す。なお、逆にこれを定義とすることもできる (すなわち $\overline{P}^{+}_{\mathrm{B,dR}} = \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}(\overline{P}_{\mathrm{B,dR}})^{F_\infty=1})$ とおく)。

(3) 作用と ev の両立性により、$\partial P_{\mathrm{B,dR}}$ にも F_∞ の作用、$\mathbb{G}_m$ の作用が誘導されることが分かる。また、$\overline{P}_{\mathrm{dR,dR}}$ および $\partial P_{\mathrm{dR,dR}}$ にも同様な $\mathbb{G}_m$ の右作用が存在する。

さて、定理 2.1 (5-c) および

$$W_{-2}\mathcal{O}({}_{\mathbf{1}}\widetilde{\Pi}^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{0}}) = \bigoplus_{n\geq 1}\mathcal{O}({}_{\mathbf{1}}\widetilde{\Pi}^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{0}})_n = \bigoplus_{n\geq 1}({}_{\mathbf{1}}A^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{0}})_n = \bigoplus_{n\geq 1}\mathfrak{H}_{-n} = 0$$

より $\mathcal{O}({}_{\mathbf{1}}\Pi^{\mathrm{mot}}_{\mathbf{0}})$ は $\mathrm{Ind}(\mathrm{MTM}^{\mathrm{eff}}_{/\mathbb{Z}})$ の対象となる。したがって、第 3 節で定義した射

$${}_{\mathbf{1}}\Pi^{\mathrm{B}}_{\mathbf{0}} \times P_{\mathrm{B,dR}} \to {}_{\mathbf{1}}\Pi^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{0}}$$

は同様の構成により

$${}_{\mathbf{1}}\Pi^{\mathrm{B}}_{\mathbf{0}} \times \overline{P}_{\mathrm{B,dR}} \to {}_{\mathbf{1}}\Pi^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{0}}$$

へと延長され、従って dch での評価写像によって射 $\overline{P}_{\mathrm{B,dR}} \to {}_{\mathbf{1}}\Pi^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{0}}$ が誘導される。

さらに、$\mathrm{dch} \in {}_{\mathbf{1}}\Pi^{\mathrm{B}}_{\mathbf{0}}(\mathbb{Q})$ は F_∞ 不変元であることから、この射は $\overline{P}^{+}_{\mathrm{B,dR}} \to {}_{\mathbf{1}}\Pi^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{0}}$ を誘導する。

ここまでを纏めたものが以下の左図であり、それを関数環に直したものが右図である。以下、右図の斜めの射も ζ^{mot} と書く。

$$\begin{tikzcd}
P_{\mathrm{B,dR}} \arrow[r] \arrow[d, hook] & {}_{\mathbf{1}}\Pi^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{0}} \\
\overline{P}_{\mathrm{B,dR}} \arrow[ur] \arrow[d] & \\
\overline{P}^{+}_{\mathrm{B,dR}} \arrow[uur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathscr{H}} & \mathfrak{H} \arrow[l, "\zeta^{\mathrm{mot}}"'] \arrow[ddl] \\
& \\
\mathscr{H} \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

4.2. **定理 1.2 (3) の証明の概略.** まず、スキーム $\partial P_{\mathrm{dR,dR}}$ の特別な点を導入する。

定義. 有効なモチーフ $M \in \mathrm{MTM}^{\mathrm{eff}}_{/\mathbb{Z}}$ に対し、次数 0 部分への射影

$$\widetilde{\omega}_{\mathrm{dR}}(M) \twoheadrightarrow \widetilde{\omega}_{\mathrm{dR}}(M)_0 \hookrightarrow \widetilde{\omega}_{\mathrm{dR}}(M)$$

を対応させることで、テンソル函手 $\omega^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{dR}}$ 間の射が定義できる。これは、$\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(-1)$ へは零射を対応させるので $\partial P_{\mathrm{dR,dR}}(\mathbb{Q})$ の点を定める。これを pr_0 と書く。

註 4.3. 有効なモチーフに対しては de Rham 実現で負の次数のみが現れることと、$\tau(r)^{-1} \in G_{\mathrm{dR}}$ が次数 $-n$ 部分を r^n 倍する射であったことを考慮すると、点 pr_0 は、$G_{\mathrm{dR}} \subset \overline{P}_{\mathrm{dR,dR}}$ における $\tau(r)^{-1}$ の "$r \to 0$ における極限" と思える。また、自然な τ^{-1} の拡張として、埋め込み $\sigma : \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{P}_{\mathrm{dR,dR}}$ が得られることも分かる。

この点 pr_0 を左から合成することで、$\mathbb{Q}$ 上のスキームの射 $\mathrm{pr}_0 \circ (-) : \overline{P}_{\mathrm{dR,dR}} \to \partial P_{\mathrm{dR,dR}}$ を得る。これを用いて以下が証明できる:

命題 4.4. (1) 合成 $U_{\mathrm{dR}} \hookrightarrow \overline{P}_{\mathrm{dR,dR}} \xrightarrow{\mathrm{pr}_0\circ(-)} \partial P_{\mathrm{dR,dR}}$ は $\mathbb{Q}$ 上のスキームの同型射となる。さらに、第 2 節で定めた U_{dR} への $\mathbb{G}_m$ の右作用と注意 4.2 (3) で述べた $\mathbb{G}_m$ の右作用はこの同型射と両立する。

(2) 註 4.3 を考慮して得られる対応 $(r, u) \mapsto \sigma(r) \circ u$ は同型

$$\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}} \times U_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\cong} \overline{P}_{\mathrm{dR,dR}}$$

を誘導する。さらに、逆数のスカラー倍による $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}$ への $\mathbb{G}_m$ の右作用と第 2 節で定めた U_{dR} への $\mathbb{G}_m$ の右作用の対角作用、および注意 4.2 (3) で述べた $\mathbb{G}_m$ の右作用はこの同型射と両立する。

証明. 証明のアイディアについて述べる。まず、$R \in \mathbf{Alg}_{\mathbb{Q}}$、$u \in U_{\mathrm{dR}}(R)$ とし、$\xi = \mathrm{pr}_0 \circ u$ とおく。このとき、各 $M \in \mathrm{MTM}^{\mathrm{eff}}_{/\mathbb{Z}}$ に対して自然な分解 $\omega_{\mathrm{dR}}(M) = \oplus_{m \le 0} \omega_{\mathrm{dR}}(M)_m$ があることに注意して、

$$u(M) = \bigoplus_{0 \ge n \ge m} u(M)_{n,m}、 \qquad \xi(M) = \bigoplus_{0 \ge n \ge m} \xi(M)_{n,m}$$

(但し $(-)_{n,m}$ は $\omega_{\mathrm{dR}}(M)_m \otimes R$ から $\omega_{\mathrm{dR}}(M)_n \otimes R$ への R 線型写像) と分解すると、以下の可換図式が各 $n \le 0$ と M に対して成り立つ ($\otimes R$ は省略):

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{m \le n} \omega_{\mathrm{dR}}(M)_m \arrow[r, "\sum_m u(M)_{n,m}"] \arrow[d, "\cong"'] & \omega_{\mathrm{dR}}(M)_n \arrow[d, "\cong"] \\
\bigoplus_{m \le n} \omega_{\mathrm{dR}}(M/W_{-2n-2}M)_m & \omega_{\mathrm{dR}}(M/W_{-2n-2}M)_n \\
\bigoplus_{m \le n} \omega_{\mathrm{dR}}(M')_{m-n} \arrow[r, "\sum_m \xi(M')_{0,m-n}"'] \arrow[u, "\cong"] & \omega_{\mathrm{dR}}(M')_0 \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

(ここで、$M' = M/W_{-2n-2}M(-n)\,(\in \mathrm{MTM}^{\mathrm{eff}}_{/\mathbb{Z}})$ とおいた)。これより、u が ξ から復元できることが分かり、同型 $U_{\mathrm{dR}}(R) \cong \partial P_{\mathrm{dR,dR}}(R)$ が構成できることも分かるので (1) が証明できる。

(2) はアフィンスキームの射

$$(\mathrm{ev}_{\mathbb{Q}(-1)}, \mathrm{pr}_0 \circ (-)) : \overline{P}_{\mathrm{dR,dR}} \longrightarrow H_{\mathrm{dR,dR}} \times \partial P_{\mathrm{dR,dR}}$$

と、(1) から誘導されるアフィンスキームの同型

$$H_{\mathrm{dR,dR}} \times \partial P_{\mathrm{dR,dR}} \xrightarrow{\cong} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}} \times U_{\mathrm{dR}}$$

との合成が逆射を与えることを確かめればよい。 □

さて、$\mathrm{comp} \in \overline{P}_{\mathrm{B,dR}}(\mathbb{C})$ を合成することにより同型 $\overline{P}_{\mathrm{dR,dR}} \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \cong \overline{P}_{\mathrm{B,dR}} \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$ が得られるので、上の命題より次が従う:

系 4.5. (1) 環 $\mathcal{O}(\overline{P}_{\mathrm{B,dR}})$ および $\mathscr{H}$ は整域である。

(2) k を -2 以上 0 以下の整数とするとき、
- (a) 次数付 $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathcal{O}(\overline{P}_{\mathrm{B,dR}})$ の k 次部分は各々 1 次元 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間である。
- (b) 評価写像 $\mathrm{ev}^* : \mathcal{O}(H_{\mathrm{B,dR}}) \to \mathcal{O}(\overline{P}_{\mathrm{B,dR}})$ は k 次部分に同型を誘導する。
- (c) 評価写像 $(\mathrm{ev}^+)^* : \mathcal{O}(\{\pm 1\} \backslash H_{\mathrm{B,dR}}) \to \mathcal{O}(\overline{P}^+_{\mathrm{B,dR}})$ は k 次部分に同型を誘導する。

最後に定理 1.2 (3-c) を示す。その為にまず以下の命題を示す。

命題 4.6. (1) F_∞ は $\partial P_{\mathrm{B,dR}}$ へは自明に作用する。

(2) $\mathbb{G}_m$ 同変な同型 $\partial P_{\mathrm{B,dR}} \cong \partial P_{\mathrm{dR,dR}}$ が存在する。

証明. まず (1) を示す。R を任意の $\mathbb{Q}$ 代数、f を $\partial P_{\mathrm{B,dR}}(R)$ の任意の元とする。この元は定義より、圏 $\mathrm{MTM}^{\mathrm{eff}}_{/\mathbb{Z}}$ から $\mathbf{Mod}_R$ へのテンソル函手の間の射 $f : \omega^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{dR}} \otimes R \to \omega^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{B}} \otimes R$ で、$f(\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(-1)) = 0$ を満たすものである。

すると、任意の環 R および任意の有効モチーフ $M \in \mathrm{MTM}^{\mathrm{eff}}_{/\mathbb{Z}}$ に対して、$f(M) : \omega^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{dR}}(M) \otimes R \to \omega^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{B}}(M) \otimes R$ は $\omega^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{B}}(W_0 M) \otimes R \hookrightarrow \omega^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{B}}(M) \otimes R$ を経由するが、$W_0 M$ は $\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(0)$ の直和と (非標準的に) 同型であるので、$\omega^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{B}}(W_0 M) \otimes R$ へは F_∞ は自明に作用する。これは、F_∞ の $\partial P_{\mathrm{B,dR}}$ の作用が自明であることを示している。

次に (2) の同型を構成する。先と同様に、R を任意の $\mathbb{Q}$ 代数、f をテンソル函手間の射 $f : \omega^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{dR}} \otimes R \to \omega^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{B}} \otimes R$ で、$f(\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(-1)) = 0$ を満たすものとする。このとき、有効モチーフ M に対して $f(M)$ は $\omega^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{B}}(W_0 M) \otimes R$ を経由するが、$W_0 M$ が $\mathbb{Q}_{\mathrm{mot}}(0)$ の直和と同型であることから標準的な同型 $\omega^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{B}}(W_0 M) \cong \omega^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{dR}}(W_0 M)$ が存在する。

そこで、これを合成したのち、自然な単射 $\omega^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{dR}}(W_0 M) \otimes R \hookrightarrow \omega^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{dR}}(M) \otimes R$ を合成することで、$\tilde{f}(M) : \omega^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{dR}}(M) \otimes R \to \omega^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{dR}}(M) \otimes R$ が得られる。これは $M \in \mathrm{MTM}^{\mathrm{eff}}_{/\mathbb{Z}}$ に関して函手的であり $\partial P_{\mathrm{dR,dR}}(R)$ の元 $\tilde{f}$ を与えることが分かる。

この、f に $\tilde{f}$ を対応させる写像は全単射であり、$\mathbb{Q}$ 代数 R に関して函手的であることは容易にわかるので所望の同型 $\partial P_{\mathrm{B,dR}} \cong \partial P_{\mathrm{dR,dR}}$ が得られる。

□

註 4.7. (2) の証明を図示すると以下のようになる ($\otimes R$ は省略):

$$
\begin{tikzcd}
\omega^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{dR}}(M) \arrow[d, "f(M)"] \arrow[dr, dashed] \arrow[drrr, "\tilde{f}(M)"] & & & \\
\omega^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{B}}(M) & \omega^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{B}}(W_0M) \arrow[l, hook'] \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"] & \omega^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{dR}}(W_0M) \arrow[r, hook] & \omega^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{dR}}(M)
\end{tikzcd}
$$

さて、定義より $\mathbb{G}_m$ 同変な図式

$$
\begin{tikzcd}
\partial P_{\mathrm{B,dR}} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \overline{P}_{\mathrm{B,dR}} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \overline{P}^{+}_{\mathrm{B,dR}} \arrow[d] \\
\{\mathbf{0}\} \arrow[r, hook, "\mathrm{incl}"] & H_{\mathrm{B,dR}} \arrow[r, two heads] & \{\pm 1\}\backslash H_{\mathrm{B,dR}}
\end{tikzcd}
$$

が得られていた。そこで命題 4.6 (1) を考慮して練習 4.8 をこの図式に適用し、さらに命題 4.4 (1) および命題 4.6 (2) を使うと、カルテシアンな $\mathbb{G}_m$ 同変図式

$$
\begin{tikzcd}
U_{\mathrm{dR}} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \overline{P}^{+}_{\mathrm{B,dR}} \arrow[d] \\
\{0\} \arrow[r, hook, "\mathrm{incl}"] & \{\pm 1\}\backslash H_{\mathrm{B,dR}}
\end{tikzcd}
$$

が得られ、これより定理 1.2 (3-c) が分かる。

練習 4.8. 多項式環 $\mathbb{Q}[t]$ および $\mathbb{Q}$ 代数 A には、それぞれ $\mathbb{Q}$ 代数自己同型 F が与えられており、$\mathbb{Q}$ 代数準同型 $f : \mathbb{Q}[t] \to A$ は F と両立しているとする。さらに、

(1) A は整域、
(2) $\mathbb{Q}[t]$ については $F(t) = -t$、A については $F^2 = \mathrm{Id}_A$ であり、
(3) $A/(f(t))$ に誘導される F の作用は恒等写像

であるとする。このとき、自然に誘導されるアフィンスキームの図式

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}\, A/(f(t)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}\, A^{F=1} \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}\, \mathbb{Q} \arrow[r] & \mathrm{Spec}\, \mathbb{Q}[t]^{F=1} (= \mathbb{Q}[t^2])
\end{tikzcd}
$$

はカルテシアンになることを示せ。

5. 付録

ここでは、本稿の内容を理解するのに必要となる用語・定理について纏めておく。

5.1. Ind 圏.

定義. (1) 小圏 I が**フィルターである (filtered)** とは、I は空でなく、次の 2 つの条件を満たすことである:

- 任意の I の対象 i、i' に対し、対象 i'' および射 $i \to i''$、$i' \to i''$ が存在する。
- 始域と終域が等しい任意の 2 つの I の射 $f, g : i \to i'$ に対し、射 $h : i' \to i''$ で $h \circ f = h \circ g$ となるものが存在する。

(2) 圏 $\mathscr{C}$ に対しその **Ind 圏 (Ind-category)** $\mathrm{Ind}(\mathscr{C})$ を以下のように定義する:

- 対象はあるフィルターからの函手 $F : I \to \mathscr{C}$ 全体である。これはしばしば (射の情報を省略して)$F = (F_i)_{i \in I}$ などと書かれる。
- 2 つの対象 $F : I \to \mathscr{C}$、$G : J \to \mathscr{C}$ に対し、F から G への射の集合を

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(\mathscr{C})}(F, G) = \varprojlim_{i \in I} \varinjlim_{j \in J} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F_i, G_j)$$

と定める。

圏 $\mathscr{C}$ の対象 x に対して、1 つの対象と 1 つの射のみからなる圏からの函手 $\mathrm{cst}_x : \{*\} \to \mathscr{C}; * \mapsto x$ を考えると、これは自然な函手

$$\mathscr{C} \to \mathrm{Ind}(\mathscr{C}); x \mapsto \mathrm{cst}_x$$

を誘導し、充満忠実となる。この意味で $\mathrm{Ind}(\mathscr{C})$ は $\mathscr{C}$ の一つの拡張となっている。

練習 5.1. 圏 $\mathscr{C}$ として $\mathbf{Vec}_K^{\mathrm{fin}}$ を取ると、$\mathrm{Ind}(\mathscr{C})$ は自然に $\mathbf{Vec}_K$ と同値になることを示せ。

練習 5.2. 圏 $\mathrm{Ind}(\mathscr{C})$ ではフィルターを添え字にもつ任意の帰納的極限が存在することを示せ。

練習 5.3. 圏 $\mathscr{C}$ がテンソル構造をもつとき、$\mathrm{Ind}(\mathscr{C})$ 上にも $(F_i)_{i\in I} \otimes (G_j)_{j\in J} = (F_i \otimes G_j)_{(i,j)\in I\times J}$ となるような自然なテンソル構造の拡張があることを示せ。

5.2. **アフィンスキームの抽象化.** まず、次の 2 つの事実を思い出しておく:

- $\mathbb{Q}$ 代数 A を与えることと
  - 圏 $\mathrm{Ind}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{fin}})$ の対象 A
  - 圏 $\mathrm{Ind}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{fin}})$ の射 $A \otimes A \to A$
  - 圏 $\mathrm{Ind}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{fin}})$ の射 $\mathbb{Q} \to A$

  で結合則等に対応する可換性を満たすものを与えることは等価である。
- $\mathbb{Q}$ 代数の圏 $\mathbf{Alg}_{\mathbb{Q}}$ と $\mathbb{Q}$ 上のアフィンスキームの圏 $\mathbf{AffSch}_{/\mathbb{Q}}$ とは反同値になっている。より詳しく、函手 $\mathrm{Spec} : (\mathbf{Alg}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{AffSch}_{/\mathbb{Q}}$ と函手 $\mathcal{O}(-) : \mathbf{AffSch}_{/\mathbb{Q}} \to (\mathbf{Alg}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{op}}$ とは互いに準逆函手になっている。

これを踏まえると一般のテンソル圏に対しても以下の様に同様の概念を定義できる:

定義. $\mathscr{C} = (\mathscr{C}, \otimes, \mathbf{1})$ をテンソル圏とする。

(1) **圏 $\mathscr{C}$ における (単位的可換) 代数対象**とは、
  (a) 圏 $\mathrm{Ind}(\mathscr{C})$ の対象 A、
  (b) 圏 $\mathrm{Ind}(\mathscr{C})$ の射 $m : A \otimes A \to A$
  (c) 圏 $\mathrm{Ind}(\mathscr{C})$ の射 $\epsilon : \mathbf{1} \to A$

  の 3 つ組であって、図式

$$\begin{tikzcd} A \otimes (A \otimes A) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_A \otimes m"'] & & (A \otimes A) \otimes A \arrow[d, "m \otimes \mathrm{Id}_A"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"] & A & A \otimes A \arrow[l, "m"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{1} \otimes A \arrow[r, "\epsilon \otimes \mathrm{Id}_A"] \arrow[dr, "\cong"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes \mathbf{1} \arrow[l, "\mathrm{Id}_A \otimes \epsilon"'] \arrow[dl, "\cong"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[rr, "\cong", "\mathrm{switch}"'] \arrow[dr, "m"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "m"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

  が可換になるようなものとする。ここで同型はテンソル圏 $\mathrm{Ind}(\mathscr{C})$ に備わっている自然同型によるものである (第 3 の図式のそれは、第 1 項と第 2 項との交換に対する自然な同型である)。

  また、代数対象 (A, m_A, ϵ_A) から (B, m_B, ϵ_B) への準同型とは、$\mathrm{Ind}(\mathscr{C})$ における A から B への射であって、他の構造と可換になるものをいう。圏 $\mathscr{C}$ における代数対象およびその準同型全体のなす圏を $\mathbf{Alg}(\mathscr{C})$ と書く。なおこの圏の対象はしばしば単に A と書かれる。

(2) 圏 $\mathbf{Alg}(\mathscr{C})^{\mathrm{op}}$ を $\mathbf{AffSch}(\mathscr{C})$ とかき、**圏 $\mathscr{C}$ におけるアフィンスキームの圏**とよぶ。

  古典的な場合の類似として、圏 $\mathbf{Alg}(\mathscr{C})$ の対象 A や射 $\alpha : A \to B$ を $\mathbf{AffSch}(\mathscr{C})$ の対象や射と思うときは $\mathrm{Spec}\, A$、$\mathrm{Spec}\,\alpha : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ と書き、$\mathbf{AffSch}(\mathscr{C})$ の対象 X や射 $f : X \to Y$ を $\mathbf{Alg}(\mathscr{C})$ の対象や射と思うときは $\mathcal{O}(X)$、$f^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ と書く。

構成から明らかなように、圏 $\mathscr{C}$ が $\mathbf{Vec}_K^{\mathrm{fin}}$ の場合には $\mathbf{Alg}(\mathscr{C})$ および $\mathbf{AffSch}(\mathscr{C})$ は自然に $\mathbf{Alg}_K$ および $\mathbf{AffSch}_{/K}$ に圏同値になる。

テンソル函手 $f : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ は、自然に函手 $\mathbf{Alg}(f) : \mathbf{Alg}(\mathscr{C}) \to \mathbf{Alg}(\mathscr{D})$ および $\mathbf{AffSch}(f) : \mathbf{AffSch}(\mathscr{C}) \to \mathbf{AffSch}(\mathscr{D})$ を誘導する。さらに、テンソル函手 $f, g : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ の間の射 $\alpha : f \to g$ は、自然変換 $\mathbf{Alg}(\alpha) : \mathbf{Alg}(f) \to \mathbf{Alg}(g)$ および $\mathbf{AffSch}(\alpha) : \mathbf{AffSch}(g) \to \mathbf{AffSch}(f)$

を誘導する。誤解のない場合には、函手および自然変換における「**Alg**」や「**AffSch**」などは省略する。

E-mail address: kei.hagihara@gmail.com