「多重ゼータ値」から「有限多重ゼータ値」へ

小野 雅隆（九州大学多重ゼータ研究センター）*

目 次

はじめに

本稿は第 26 回整数論サマースクール「多重ゼータ値」における講演「『多重ゼータ値』から『有限多重ゼータ値』へ」の講演者による報告記事である．近年 Zagier によって「有限多重ゼータ値」と呼ばれる対象が定義されたが, 有限多重ゼータ値の織りなす世界が通常の多重ゼータ値の世界に負けず劣らず豊かな世界であることが Kaneko と Zagier によって予想され

*講演時の所属：慶應義塾大学

ている．この予想によると通常の多重ゼータ値の世界における有限多重ゼータ値の対応物は「対称多重ゼータ値」と呼ばれる対象である．対称多重ゼータ値は通常の多重ゼータ値の情報のみを用いて定義される．全く違う世界の 2 つの対象を関係付ける Kaneko–Zagier 予想は非常に興味深く, 多くの数学者の注目を集めている．

本稿の目的は, 第一に有限多重ゼータ値と対称多重ゼータ値を定義し, Kaneko–Zagier 予想を定式化することである．第二に, 有限・対称多重ゼータ値の知られている関係式を, 講演では紹介できなかったものも合わせて紹介することである．これらの関係式は Kaneko–Zagier 予想を支持する状況証拠とみなせるものである．証明はそれぞれの文献を参照してほしい．ここで紹介する関係式のうち有限・対称特有の関係式とみなせるものもあるが, 多くは多重ゼータ値の間で成立する線型関係式の有限・対称類似とみなせるものである．そのため多重ゼータ値間の対応する線型関係式に関する文献もわかる形で紹介している．第三に, 考えられる課題を提示することである．有限多重ゼータ値や対称多重ゼータ値は比較的新しく定義された対象である．それゆえ近年めざましく発展しているものの, まだまだ多くの課題が考えられる．この節では筆者の思いつくままに考えられる課題を掲載した．すぐに取り組めると思われる課題もあるので, 興味のある方は是非取り組んでいただきたい．

有限多重ゼータ値の織りなす不思議で魅力的な世界の一端を感じていただければ幸いである．

1 有限多重ゼータ値

1.1 定義

$\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ をインデックスとする．素数 p に対し

$$\zeta_{<p}(\mathbf{k})=\zeta_{<p}(k_1,\dots,k_r):=\sum_{0<m_1<\cdots<m_r<p}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\in\mathbb{Z}_{(p)},$$

$$\zeta^\star_{<p}(\mathbf{k})=\zeta^\star_{<p}(k_1,\dots,k_r):=\sum_{0<m_1\le\cdots\le m_r<p}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\in\mathbb{Z}_{(p)}$$

とおく．空インデックス $\emptyset$ に対しては $\zeta_{<p}(\emptyset)=\zeta^\star_{<p}(\emptyset):=1$ とおく．Hoffman [18] と Zhao [67] は独立に $\zeta^\bullet_{<p}(\mathbf{k}) \bmod p$ $(\bullet\in\{\emptyset,\star\})$ を考察し, 具体的な値の決定や, これらの間の関係式について先駆的な研究を行い, 現在では多くの数学者による研究が知られている．

Zagier は 2011 年ごろ, $\zeta_{<p}(\mathbf{k}) \bmod p$ を素数 p ごとに考えるのではなく全ての素数について同時に考える新たな枠組みを考案した．それは $\zeta_{<p}(\mathbf{k}) \bmod p$ を次の環 $\mathcal{A}$ の中で考えようというものである．

定義 1.1.1.

$$\mathcal{A}:=\prod_{p:\mathrm{prime}}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\Big/\bigoplus_{p:\mathrm{prime}}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

とおく．

注意 1.1.2. 1. $\mathcal{A}$ の元を $(a_p)_p(a_p \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ と表す. $\mathcal{A}$ において, $(a_p)_p = (b_p)_p$ であることと有限個を除く全ての素数 p について $a_p = b_p$ であることが同値である.

2. $\bigoplus_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = (\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$ であるので, $\mathcal{A} = (\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ が成り立つ. これより $\mathcal{A}$ は $\mathbb{Q}$ 代数となる. $\mathcal{A}$ が $\mathbb{Q}$ 代数であることは, 単射 $\mathbb{Q} \ni r \mapsto (r_p)_p \in \mathcal{A}$ が存在することからもわかる. ただし素数 p に対し

$$r_p := \begin{cases} r \bmod p & (r\text{ の分母}, p) = 1 \text{ のとき}, \\ 0 & (r\text{ の分母}, p) \neq 1 \text{ のとき}. \end{cases}$$

定義 1.1.3. インデックス $\mathbf{k}$ と $\bullet \in \{\emptyset, \star\}$ に対し, $\mathcal{A}$ の元 $\zeta_{\mathcal{A}}^{\bullet}(\mathbf{k})$ を

$$\zeta_{\mathcal{A}}^{\bullet}(\mathbf{k}) := (\zeta_{<p}^{\bullet}(\mathbf{k}) \bmod p)_p \in \mathcal{A}$$

と定義し, $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ を有限多重ゼータ値, $\zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(\mathbf{k})$ を有限多重ゼータスター値と呼ぶ.

注意 1.1.4. 有限多重ゼータ値と有限多重ゼータスター値は, 通常の多重ゼータ値の場合と同様に, お互いがお互いの有限和で書き下すことができる. 具体的には

$$\zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}' \preceq \mathbf{k}} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}'), \quad \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}') = \sum_{\mathbf{k}' \preceq \mathbf{k}} (-1)^{\sigma(\mathbf{k}')} \zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(\mathbf{k}')$$

が成り立つ. ただし $\mathbf{k}' \preceq \mathbf{k}$ とは, インデックス $\mathbf{k}'$ が $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に現れる ‘,’ のいくつかを ‘+’ に置き換えて得られることを意味する. 例えば

$$(5) \preceq (2,3) \preceq (1,1,3) \preceq (1,1,2,1) \preceq (1,1,1,1,1)$$

である. また $\sigma(\mathbf{k}')$ は $\mathbf{k}$ から $\mathbf{k}'$ を作る際に置き換えた ‘+’ の数である. 例えば

$$\zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(k_1,k_2,k_3) = \zeta_{\mathcal{A}}(k_1,k_2,k_3) + \zeta_{\mathcal{A}}(k_1+k_2,k_3) + \zeta_{\mathcal{A}}(k_1,k_2+k_3) + \zeta_{\mathcal{A}}(k_1+k_2+k_3),$$

$$\zeta_{\mathcal{A}}(k_1,k_2,k_3) = \zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(k_1,k_2,k_3) - \zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(k_1+k_2,k_3) - \zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(k_1,k_2+k_3) + \zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(k_1+k_2+k_3)$$

である.

1.2 次元予想

多重ゼータ値の場合と同様に, 非負整数 k に対し重さが k である有限多重ゼータ値全体が生成する $\mathcal{A}$ の $\mathbb{Q}$-部分空間を $\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}$ とおく.

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} := \langle \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k}\text{ はインデックス}, \mathrm{wt}(\mathbf{k}) = k \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{A}$$

($\mathcal{Z}_{\mathcal{A},0} = \mathbb{Q}$ である.) また

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} := \sum_{k \geq 0} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} \subset \mathcal{A}$$

とおく. $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ は次の調和関係式によって $\mathcal{A}$ の部分 $\mathbb{Q}$ 代数になる.

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k} * \mathbf{l}) = \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{l})$$

ただし $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ はインデックスで, $\mathbf{k} * \mathbf{l}$ は $\mathbf{k}$ と $\mathbf{l}$ の調和積である (金子氏の報告記事 [28, 命題 2.4] の証明の直後を参照). これは $\zeta_{<p}(\mathbf{k})$ が調和関係式を満たすことから従う.

次の予想は多重ゼータ値の次元予想の $\mathcal{A}$-類似である.

予想 1.2.1 (Zagier)**.** 全ての非負整数 k に対し, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} = d_k - d_{k-2} = d_{k-3}$ が成り立つ. ただし $\{d_k\}_{k\geq -3}$ は

$$\begin{cases} d_{-3} := 1, d_{-2} := 0, d_{-1} := 0, \\ d_k = d_{k-2} + d_{k-3} \ (k \geq 0) \end{cases}$$

で定まる数列である.

注意 1.2.2. 上の数列 $\{d_k\}_{k\geq -3}$ は通常の多重ゼータ値の次元予想に現れる数列を k が -3 まで拡張したものである. 実際初期値と漸化式から $d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 1$ が得られる.

各 k について $\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}$ と $\mathcal{Z}_k$ の予想次元を表にまとめると以下の通り.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}$ の予想次元	1	0	0	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7
$\mathcal{Z}_k$ の予想次元	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16

この予想については次の結果が知られている. これは多重ゼータ値における Terasoma [60] や Deligne–Goncharov [8] の結果の $\mathcal{A}$-類似に当たる.

定理 1.2.3 (Akagi–Hirose–Yasuda[1]+Jarossay[21])**.** 全ての非負整数 k に対し,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} \leq d_{k-3}$$

が成り立つ.

注意 1.2.4. 逆向きの不等式が示されれば予想は示されたことになるが, これは有限多重ゼータ値たちの $\mathbb{Q}$ 上の代数的独立性などの $\mathcal{A}$ における超越数論的な困難があり, 非常に難しい問題であると思われる.

この定理により, 有限多重ゼータ値の間にも多くの $\mathbb{Q}$ 上の線型関係式が存在することがわかる. 証明については安田氏の報告記事 [65] を参照.

注意 1.2.5. 通常の多重ゼータ値の場合と異なり, $k_1, \ldots, k_r$ が非正整数でも $\zeta^{\bullet}_{\mathcal{A}}(k_1, \ldots, k_r) \in \mathcal{A}$ を同様に定義することができる. しかしインデックスの成分が負である場合は, Faulhaber の公

式 (いわゆるべき和の公式) を用いて全て正の整数を成分にもつインデックスの有限多重ゼータ値の有限和で書き直すことができる．例えば

$$\zeta_{\mathcal{A}}(-1,3,2)=\frac{1}{2}\zeta_{\mathcal{A}}(1,2)-\frac{1}{2}\zeta_{\mathcal{A}}(2,2)$$

が成り立つ．この例からもわかるように, インデックスの成分が非正である場合は, 重さの異なる有限多重ゼータ値の間にも $\mathbb{Q}$ 上の線型関係式が存在しうる．インデックスが非正整数である場合の有限多重ゼータ値の研究は, 例えば [32] や [63] がある．本稿では成分が非正整数を含む場合の有限多重ゼータ値はこれ以上扱わず, 成分が全て正整数の有限多重ゼータ値のみを扱うこととする．

1.3 有限多重ゼータ値の具体的な値と関係式

この小節では知られている有限多重ゼータ値の具体的な値と $\mathbb{Q}$ 上の線型関係式をいくつか紹介する．

1.3.1 具体的な値

まず有限多重ゼータ値が具体的に表示される場合を紹介しよう．はじめに深さが 1 の場合である．この場合は常に 0 になる．

定理 1.3.1 ([18, THEOREM 4.3], [67, Lemma 2.2])**.** 正整数 k に対して

$$\zeta_{\mathcal{A}}(k)=0$$

が成り立つ．

これは $p-1 \nmid k$ の時 $\zeta_{<p}(k)\equiv 0 \bmod p$ であることからわかる ($p-1\mid k$ となる p は有限個しかないことに注意する)．次に深さが 2 の場合であるが, この場合は Seki-Bernoulli 数で書けることが知られている．

定理 1.3.2 ([18, THEOREM 6.1], [67, Theorem 1.7])**.** 正整数 k_1,k_2 に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(k_1,k_2)=(-1)^{k_2}\binom{k_1+k_2}{k_1}Z(k_1+k_2)$$

が成り立つ．ただし, 正整数 k に対し

$$Z(k):=\left(\frac{B_{p-k}}{k} \bmod p\right)_p\in\mathcal{A}$$

であり, B_n は n 番目の Seki-Bernoulli 数で,

$$\frac{xe^x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$$

で定義される有理数である．

これは Faulhaber の公式 (べき和の公式) を用いるとすぐに示すことができる.

深さが 3 の場合もインデックスの重さが奇数の場合は, 深さが 2 の場合のように Seki-Bernoulli 数を用いて具体的に記述することができる ([18, Theorem 6.2]).

注意 1.3.3. 1. 上述のように Riemann ゼータ値の素朴な $\mathcal{A}$-類似 $\zeta_{\mathcal{A}}(k)$ は 0 になってしまったが, 以下の heuristic により $Z(k)$ が Riemann ゼータ値の "正しい" $\mathcal{A}$-類似だと信じられている (ただし, 最初の合同関係は k が負の場合に Kummer 合同式から得られるものだが, k が正の場合には意味がない).

$$\zeta(k)\text{``}\underset{\bmod p}{\equiv}\text{''}\zeta(k-(p-1)) = -\frac{B_{p-k}}{p-k} \equiv Z(k)_p$$

2. k が偶数ならば, 奇素数 p に対し $B_{p-k}=0$ になるので $Z(k)=0$ がわかる. 一方で 3 以上の奇数 k で $Z(k)\neq 0$ となる例は未だ知られていない. これは非常に難しい問題のようである. 例えば正則素数が無限個存在すれば, 3 以上の全ての奇数 k に対し $Z(k)\neq 0$ を示すことができる. 正則素数の無限性は非常に難しい問題として知られているが, これに比べると, 各奇数 $k\geq 3$ に対して $Z(k)\neq 0$ であるというのはかなり弱い主張である. 証明する手立ては何か無いのだろうか.

3. さらに言うと $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\neq 0$ となる空でないインデックス $\mathbf{k}$ の例は未だ知られていない. つまり我々は「空でない任意のインデックス $\mathbf{k}$ に対して常に $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})=0$ である」という可能性を未だ排除できていないのである. これは喫緊の課題である.

これら以外にも明示的に計算されている有限多重ゼータ値があるので, 証明なしに紹介する.

定理 1.3.4 ([51, Theorem 4.2])**.** 非負整数 k_1,k_2 に対し

$$\begin{aligned}&\zeta_{\mathcal{A}}\bigl(\{2\}^{k_1},1,\{2\}^{k_2}\bigr)\\ &=2(-1)^{k_1+k_2}(1-4^{-k_1-k_2})\left(\binom{2k_1+2k_2+1}{2k_1+1}-\binom{2k_1+2k_2+1}{2k_2+1}\right)Z(2k_1+2k_2+1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}\bigl(\{2\}^{k_1},1,\{2\}^{k_2}\bigr)\\ &=2(1-4^{-k_1-k_2})\left(\binom{2k_1+2k_2+1}{2k_1+1}-\binom{2k_1+2k_2+1}{2k_2+1}\right)Z(2k_1+2k_2+1)\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし正整数 k と非負整数 r に対し $\{k\}^r := \underbrace{k,\dots,k}_{r\text{ 個}}$ である.

定理 1.3.5 ([51, Theorem 4.1])**.** 非負整数 k_1,k_2 に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}\bigl(\{2\}^{k_1},3,\{2\}^{k_2}\bigr)=2(-1)^{k_1+k_2}\left(\binom{2k_1+2k_2+3}{2k_1+2}-\binom{2k_1+2k_2+3}{2k_2+2}\right)Z(2k_1+2k_2+3),$$

$$\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}\bigl(\{2\}^{k_1},3,\{2\}^{k_2}\bigr)=2\left(\binom{2k_1+2k_2+3}{2k_1+2}-\binom{2k_1+2k_2+3}{2k_2+2}\right)Z(2k_1+2k_2+3)$$

が成り立つ.

値が 0 になる例としては, 例えば次が知られている.

定理 1.3.6 ([18, (15)], [25, p29], [67, Theorem 2.13])**.** 正整数 k, n に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\{k\}^n) = \zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(\{k\}^n) = 0$$

が成り立つ.

$\zeta(2) = \pi^2/6, \zeta_{\mathcal{A}}(2) = 0$ であるので, $\mathcal{A}$ の世界では "$\pi^2 = 0$" と思うことができる. 通常の多重ゼータ値の場合, 2 以上の偶数 k と正整数 n に対し $\zeta(\{k\}^n) \in \mathbb{Q}\pi^{kn}$ が知られており, 上の定理はこの結果の $\mathcal{A}$-類似とみなすことができる.

他にも例えば次が知られている.

定理 1.3.7 ([67, Theorem 3.18 (ii)])**.** 正整数 n と正の奇数 k_1, k_2 に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\{k_1, k_2\}^n) = \zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(\{k_1, k_2\}^n) = 0$$

が成り立つ. ただし $\{k_1, k_2\}^n := \underbrace{k_1, k_2, \ldots, k_1, k_2}_{2n}$ である.

この定理は $\zeta^{\bullet}(\{1, 3\}^n) \in \mathbb{Q}\pi^{4n}$ $(\bullet \in \{\emptyset, \star\})$([6, Theorem 1], [34, 2.5], [37, Theorem B] など) の $\mathcal{A}$-類似 (およびその一般化) とみなすことができる.

1.3.2 線型関係式

続いて $\mathbb{Q}$ 上の線型関係式を紹介する. ここでは通常の多重ゼータ値の $\mathcal{A}$-類似と考えられる関係式を紹介する.

シャッフル関係式　まず紹介するのは線型関係式の中でも基本的なものと思われるシャッフル関係式である. 通常の多重ゼータ値の場合は多重ゼータ値の積を和で書く代数関係式であったが, 有限多重ゼータ値の場合は線型関係式になる.

定理 1.3.8 ([26, (2.3)], [30], [47, Corollary 4.1])**.** インデックス $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k} ш \mathbf{l}) = (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{l})} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}, \bar{\mathbf{l}})$$

が成り立つ. ただし $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_s)$ のとき $\bar{\mathbf{l}} = (l_s, \ldots, l_1)$ であり, $\mathbf{k} ш \mathbf{l}$ は $\mathbf{k}$ と $\mathbf{l}$ のシャッフル積である (金子氏の報告記事 [28, 3 積分表示] を参照).

注意 1.3.9. シャッフル関係式において $\mathbf{k} = \emptyset$ とおくと

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{l}) = (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{l})} \zeta_{\mathcal{A}}(\bar{\mathbf{l}})$$

が得られる (反転公式). 通常の多重ゼータ値の場合は $\zeta(\mathbf{k})$ と $\zeta(\overline{\mathbf{k}})$ の間には一般には $\mathbb{Q}$ 上の線型関係は期待できないので, 反転公式は有限多重ゼータ値特有の線型関係式と言える.

シャッフル関係式の証明の概略. [47] の部分分数分解を用いるアイディアに沿って $\mathbf{k}=(1), \mathbf{l}=(1,2)$ の場合に証明をスケッチする. $\mathcal{A}$ の元

$$X := \left(\sum_{\substack{m_1,m_2,m_3>0 \\ m_1+m_2+m_3<p}} \frac{1}{m_1 m_2 (m_2+m_3)^2} \bmod p \right)_p$$

を考える. X を 2 通りに式変形する. まず部分分数分解

$$\frac{1}{ab^2} = \frac{1}{a(a+b)^2} + \frac{1}{b^2(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)^2}$$

を $a=m_1, b=m_2+m_3$ に用いて

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m_1 m_2 (m_2+m_3)^2} \\ &= \frac{1}{m_1 m_2 (m_1+m_2+m_3)^2} + \frac{1}{m_2(m_2+m_3)^2(m_1+m_2+m_3)} + \frac{1}{m_2(m_2+m_3)(m_1+m_2+m_3)^2} \end{aligned}$$

を得る. したがってこの式の第 2 項から $\zeta_{\mathcal{A}}(1,2,1)$ が, 第 3 項から $\zeta_{\mathcal{A}}(1,1,2)$ が出てくる. また部分分数分解

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)}$$

を第 1 項の (m_1, m_2) に用いることで $\zeta_{\mathcal{A}}(1,1,2)$ が 2 つ現れ, $X = 3\zeta_{\mathcal{A}}(1,1,2) + \zeta_{\mathcal{A}}(1,2,1)$ となる. $(1) ш (1,2) = 3(1,1,2) + (1,2,1)$ であるので, 結局 $X = \zeta_{\mathcal{A}}((1) ш (1,2))$ を得る.

一方 $n_1 = m_1, n_2 = p - m_2, n_3 = p - m_2 - m_3$ と変数変換すると

$$\begin{aligned} X &= \left(\sum_{0<n_1<n_3<n_2<p} \frac{1}{n_1(p-n_2)(p-n_3)^2} \bmod p \right)_p \\ &= (-1)^3 \zeta_{\mathcal{A}}(1,2,1) = (-1)^{\mathrm{wt}((1,2))} \zeta_{\mathcal{A}}((1), \overline{(1,2)}) \end{aligned}$$

となり, $\mathbf{k}=(1), \mathbf{l}=(1,2)$ の場合のシャッフル関係式が得られた. □

一般の $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r), \mathbf{l}=(l_1,\dots,l_s)$ の場合は,

$$X(\mathbf{k},\mathbf{l}) := \left(\sum_{\substack{m_1,\dots,m_r,n_1,\dots,n_s>0 \\ m_1+\cdots+m_r+n_1+\cdots+n_s<p}} \frac{1}{M_1^{k_1} M_2^{k_2} \cdots M_r^{k_r} N_1^{l_1} N_2^{l_2} \cdots N_s^{l_s}} \bmod p \right)_p$$

という $\mathcal{A}$ の元を考え (ただし $M_i := m_1 + \cdots + m_i, N_i := n_1 + \cdots + n_i$), 部分分数分解

$$\frac{1}{a^k b^l} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{l-1+i}{i} \frac{1}{a^{k-i}(a+b)^{l+i}} + \sum_{i=0}^{l-1} \binom{k-1+i}{i} \frac{1}{b^{l-i}(a+b)^{k+i}}$$

$(k, l \geq 1)$ を繰り返し用いることで $X(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k} \,ш\, \mathbf{l})$ を示すことができる (ここが非自明である. $\mathrm{dep}(\mathbf{k}) + \mathrm{dep}(\mathbf{l})$ に関する帰納法で示される). 一方で $m_i' = m_i (1 \leq i \leq r)$, $n_1' = p - n_1$, $n_2' = p - n_1 - n_2, \ldots, n_s' = p - n_1 - \cdots - n_s$ という変数変換により,

$$\begin{aligned} X(\mathbf{k}, \mathbf{l}) &= \left(\sum_{0 < m_1' < \cdots < m_r' < n_s' < \cdots < n_1' < p} \frac{1}{m_1'^{k_1} \cdots m_r'^{k_r} (p - n_1')^{l_1} \cdots (p - n_s')^{l_s}} \bmod p \right)_p \\ &= (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{l})} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}, \bar{\mathbf{l}}) \end{aligned}$$

がわかり, 有限多重ゼータ値に対するシャッフル関係式が証明される.

注意 1.3.10. Kaneko と Zagier による証明 ([27], [30]) は上記のものとは異なり, 多重ポリログ函数

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z) := \sum_{0 < m_1 < \cdots < m_r} \frac{z^{m_r}}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}} \quad (|z| < 1)$$

がシャッフル関係式

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z) \cdot \mathrm{Li}_{\mathbf{l}}(z) = \mathrm{Li}_{\mathbf{k} ш \mathbf{l}}(z)$$

を満たすことを用いている. 詳しくは [27, Theorem 8.1] の証明を参照せよ.

次の予想は通常の多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$ 上の線型関係式が全て正規化複シャッフル関係式から導かれるという予想の $\mathcal{A}$-類似である.

予想 1.3.11 (Kaneko–Zagier)**.** 有限多重ゼータ値の間の $\mathbb{Q}$ 上の線型関係式は, 以下の 2 つの線型関係式の有限個の組合せで得られるであろう.

$$\begin{cases} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k} * (l)) = 0 \ (\mathbf{k} \text{ はインデックス}, l \text{ は正の整数}) \\ \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k} \,ш\, \mathbf{l}) = (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{l})} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}, \bar{\mathbf{l}}) \ (\mathbf{k}, \mathbf{l} \text{ はインデックス}). \end{cases}$$

上の関係式は一方のインデックスの深さが 1 であるため, 左辺を調和関係式でバラすと 0 となり, 有限多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$ 上の線型関係式を与えていることに注意する.

他にも知られている $\mathbb{Q}$ 上の線型関係式があるので, 証明なしでいくつか紹介する. 証明についてはそれぞれの参考文献を参照.

対称和に関する関係式　正整数 r に対し $\mathfrak{S}_r$ を r 次対称群とする. 次の定理は多重ゼータ値の対称和が Riemann ゼータ値の積で表せることの $\mathcal{A}$-類似である.

定理 1.3.12 ([18, THEOREM 4.4])**.** 空でないインデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ と $\bullet \in \{\emptyset, \star\}$ に対し

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \zeta_{\mathcal{A}}^{\bullet}(k_{\sigma(1)}, \ldots, k_{\sigma(r)}) = 0$$

が成り立つ.

注意 1.3.13. $\mathbf{k} = (\{k\}^n)$ とすると定理 1.3.6 が得られる.

Bowman–Bradley 型の関係式　次の定理はいわゆる多重ゼータ (スター) 値の Bowman–Bradley の定理 ([5, Corollary 5.1], [33, Theorem 1.1], [38, Theorem 1], [59, Theorem 1.1], [62, Theorem 1.1]) の $\mathcal{A}$-類似である.

定理 1.3.14 ([53, Theorem 1.4])**.** a, b を正の奇数, c を正の偶数とし, m, n を非負整数で $(m,n) \neq (0,0)$ であるものとする. このとき $\bullet \in \{\emptyset, \star\}$ に対し

$$\sum_{\substack{n_0+\cdots+n_{2m}=n \\ n_0,\ldots,n_{2m}\geq 0}} \zeta_{\mathcal{A}}^{\bullet}(\{c\}^{n_0}, a, \{c\}^{n_1}, b, \{c\}^{n_2}, a, \ldots, a, \{c\}^{n_{2m-1}}, b, \{c\}^{n_{2m}}) = 0$$

が成り立つ.

注意 1.3.15. つい最近, この定理の $(a,b,c) = (1,3,2)$ の場合の mod p^2 版が示された [43, Theorem 1.3].

和公式　次に有限多重ゼータ値の和公式を紹介する. $1 \leq i \leq r < k$ を満たす正整数 i, k, r に対し, 重さが k, 深さが r で $k_i \geq 2$ となるインデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ 全体のなす集合を $I_{k,r,i}$ と表す. この時, 通常の多重ゼータ (スター) 値の和公式とは

$$\sum_{\mathbf{k}\in I_{k,r,r}} \zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k), \qquad \sum_{\mathbf{k}\in I_{k,r,r}} \zeta^{\star}(\mathbf{k}) = \binom{k-1}{r-1}\zeta(k)$$

であった ([3, (11)], [10, Proposition], [17, pp.280–281]).

定理 1.3.16 (和公式, [52, Theorem 1.4])**.** $1 \leq i \leq r < k$ を満たす正整数 i, k, r に対し,

$$\sum_{\mathbf{k}\in I_{k,r,i}} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = (-1)^i \left\{ \binom{k-1}{i-1} + (-1)^r \binom{k-1}{r-i} \right\} Z(k)$$

$$\sum_{\mathbf{k}\in I_{k,r,i}} \zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(\mathbf{k}) = (-1)^i \left\{ \binom{k-1}{r-i} + (-1)^r \binom{k-1}{i-1} \right\} Z(k)$$

が成り立つ.

注意 1.3.17.
1. 通常の多重ゼータ (スター) 値の和公式の右辺と有限多重ゼータ値の和公式の右辺を比べると, 符号や二項係数のズレはあるが, $Z(k)$ が $\zeta(k)$ の $\mathcal{A}$ の正しい対応物とみなすことができる.
2. この関係式は mod p^2 版が知られている [58, Theorem 2.5].

双対関係式　次に双対関係式の $\mathcal{A}$-類似を紹介する. 有限多重ゼータ値の双対関係式は, Hoffman インデックスと呼ばれる通常の双対インデックスとは異なる双対インデックスを用いて定式化されるため, まずは Hoffman 双対インデックスを定義する.

インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ を 1 の足し算で表す, つまり $(\underbrace{1+\cdots+1}_{k_1}, \ldots, \underbrace{1+\cdots+1}_{k_r})$ と表したとき, “+” と “,” を入れ替えてできるインデックスを $\mathbf{k}^{\vee}$ と表し, $\mathbf{k}$ の Hoffman 双対インデッ

クスという ($\emptyset^\vee = \emptyset$ と定める). 例えば $(2,1,3)^\vee = (1+1,1,1+1+1)^\vee = (1,1+1+1,1,1) = (1,3,1,1)$ である.

定理 1.3.18 (Hoffman 双対関係式, [18, THEOREM 4.6], [58, Corollary 2.2])**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(\mathbf{k}) = -\zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(\mathbf{k}^\vee)$$

が成り立つ.

注意 1.3.19. この関係式は任意の正整数 n に対する mod p^n の関係式に [55, Theorem 1.3], さらにより一般に有限多重ポリログの間の mod p^n での関係式に一般化されることが知られている [55, Theorem 1.5]. 有限多重ポリログについてはこれ以上触れない. 興味のある方は [48], [49], [54], [55] などを参照されたい.

大野型関係式　次に大野関係式の $\mathcal{A}$-類似を紹介する.

定理 1.3.20 (大野型関係式, [50, Theorem 1.4])**.** インデックス $(k_1,\dots,k_r)$ に対し, その Hoffman 双対インデックスを $(k'_1,\dots,k'_{r'})$ と表すとき, これらと整数 $l \geq 0$ に対し

$$\sum_{\substack{e_1+\cdots+e_r=l\\ e_1,\dots,e_r\geq 0}} \zeta_{\mathcal{A}}(k_1+e_1,\dots,k_r+e_r) = \sum_{\substack{e'_1+\cdots+e'_{r'}=l\\ e'_1,\dots,e'_{r'}\geq 0}} \zeta_{\mathcal{A}}\left((k'_1+e'_1,\dots,k'_{r'}+e'_{r'})^\vee\right)$$

が成り立つ.

注意 1.3.21. $\mathbf{k} = (\{1\}^{r-i},2,\{1\}^{i-1})(1\leq i\leq r), l = k-r-1$ として式変形すると定理 1.3.16 が得られる [50, Corollary 3.1].

有限多重ゼータスター値に対しても大野型関係式が知られている.

定理 1.3.22 (有限多重ゼータスター値に対する大野型関係式, [14, Theorem 1.12], [58, Corollary 2.3])**.** 空でないインデックス $\mathbf{k} = (k_1,\dots,k_r)$ と $\mathbf{e} = (e_1,\dots,e_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ に対し

$$b(\mathbf{k},\mathbf{e}) := \prod_{i=1}^{r} \binom{k_i+e_i+\delta_{i,1}+\delta_{i,r}-2}{e_i}$$

とおく. ただし $\delta_{i,j}$ は Kronecker のデルタで

$$\binom{n-1}{n} := \begin{cases} 1 & n=0 \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

である. このとき空でないインデックス $\mathbf{k} = (k_1,\dots,k_r)$ と非負整数 l に対し

$$\sum_{\substack{\mathbf{e}=(e_1,\dots,e_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^r\\ e_1+\cdots+e_r=l}} b(\mathbf{k},\mathbf{e})\zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(k_1+e_1,\dots,k_r+e_r) = -\sum_{\substack{\mathbf{e}'=(e'_1,\dots,e'_{r'})\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r'}\\ e'_1+\cdots+e'_{r'}=l}} \zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(k'_1+e'_1,\dots,k'_{r'}+e'_{r'})$$

が成り立つ. ただし $\mathbf{k}^\vee = (k'_1,\dots,k'_{r'})$.

注意 1.3.23. 1. $\mathbf{k}=(i,r+1-i)$ $(1\le i\le r)$, $l=k-r-1$ とすると, 定理 1.3.16 が得られる [14, Proposition 3.2].

2. この関係式も任意の正整数 n に対し mod p^n 版が存在することが知られている ([42, Theorem 3.2], [58]).

導分関係式 次に紹介する導分関係式は Hoffman 代数の言葉で定式化されるので, ここで導入する. $\mathfrak{H}:=\mathbb{Q}\langle e_0,e_1\rangle$ を $\mathbb{Q}$ 上の 2 変数非可換多項式環とし, $\mathfrak{H}^1:=\mathbb{Q}+e_1\mathfrak{H}\supset\mathfrak{H}^0:=\mathbb{Q}+e_1\mathfrak{H}e_0$ とおく. $\mathfrak{H}^1$ は $\mathbb{Q}$ 上 $e_k:=e_1e_0^{k-1}(k\ge 1)$ たちで生成されることに注意する. 写像 $Z_{\mathcal{A}}:\mathfrak{H}^1\to\mathcal{A}$ を $Z_{\mathcal{A}}(e_{k_1}\cdots e_{k_r}):=\zeta_{\mathcal{A}}(k_1,\dots,k_r)$ と定義し, $\mathbb{Q}$ 線型写像に伸ばす.

次に $\mathfrak{H}$ 上の導分とは, $\mathbb{Q}$ 線型写像 $\partial:\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$ であって, 勝手な $w,w'\in\mathfrak{H}$ に対し $\partial(ww')=\partial(w)w'+w\partial(w')$ が成り立つもののことである. 生成元 e_0,e_1 の像を決めると導分が一意に決まることに注意する. 正整数 l に対し, 導分 $\partial_l:\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$ を

$$\begin{cases}\partial_l(e_0):=e_1e^{l-1}e_0,\\ \partial_l(e_1):=-e_1e^{l-1}e_0\end{cases}$$

によって定義する. ただし $e:=e_0+e_1$.

定理 1.3.24 (導分関係式 [40, Theorem 2.1])**.** インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$, 正整数 l および $w\in\mathfrak{H}^1$ に対して

$$\begin{aligned}&Z_{\mathcal{A}}(e_1e^{k_1-1}\cdots e_1e^{k_r-1}\partial_l(w))\\&=-Z_{\mathcal{A}}(e_1e^{l-1}e_1e^{k_1-1}\cdots e_1e^{k_r-1}w)\\&+\sum_{i=1}^{r}Z_{\mathcal{A}}(e_1e^{k_1-1}\cdots e_1e^{k_{i-1}-1}e_0e^{k_i-1}e_1e^{l-1}e_1e^{k_{i+1}-1}\cdots e_0e^{k_r-1}w)\end{aligned}$$

が成り立つ. $r=0$ の場合は $e_0e^{k_1-1}\cdots e_0e^{k_r-1}=1$ と理解する. 特にこのとき

$$Z_{\mathcal{A}}(\partial_l(w))=-Z_{\mathcal{A}}(e_1e^{l-1}w)$$

が成り立つ.

注意 1.3.25. 1. 導分関係式も正の整数 n に対する mod p^n 版が知られている [42, Theorem 1.3].

2. 有限多重ゼータ値の大野型関係式と導分関係式は同値であることが知られている [19, Theorem 3.4].

Aoki–Ohno の関係式/Le–Murakami の関係式 Aoki–Ohno の関係式および Le–Murakami の関係式の $\mathcal{A}$-類似を紹介する. $k\ge 2s$ を満たす正整数 k,r,s に対し, $I_0(k,r,s)$ で重さが k, 深さが r で高さが s である収束インデックス全体のなす集合を表す. ここで高さとは $\#\{i\mid k_i\ge 2\}$

のことである．また，収束インデックスとは空インデックスか $k_r \geq 2$ であるインデックスのことであったことを思い出す．$I_0(k,s) := \bigcup_r I_0(k,r,s)$ とおく．

Aoki–Ohno [2, Theorem 1] は

$$\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,s)} \zeta^\star(\mathbf{k}) = 2\binom{k-1}{2s-1}(1-2^{1-k})\zeta(k)$$

を，Le–Murakami [35, (2)] は k が偶数の時，

$$\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,s)} (-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}\zeta(\mathbf{k}) = \frac{(-1)^{k/2}}{(k+1)!}\sum_{r=0}^{k/2-s}\binom{k+1}{2r}(2-2^{2r})B_{2r}\pi^k$$

が成り立つことをそれぞれ示した．Le–Murakami の関係式は初めは結び目の不変量を通じて得られた関係式である．以下の定理はその $\mathcal{A}$-類似である．右辺が一致することは興味深い．

定理 1.3.26 ([29, Theorem 1.1])**.** $k \geq 2s$ を満たす正整数 k, s に対し

$$\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,s)} \zeta^\star_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = 2\binom{k-1}{2s-1}(1-2^{1-k})Z(k),$$

$$\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,s)} (-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = 2\binom{k-1}{2s-1}(1-2^{1-k})Z(k)$$

が成り立つ．

Li の定理　最後に多重ゼータスター値の双対性に関する Li の定理の $\mathcal{A}$-類似について紹介する．これは Kaneko によって予想され [25, p31]，サマースクール開催当時東北大学修士 2 年であった桜田氏によって証明された．

$$X_0^\star(k,r,s) := \sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,r,s)} \zeta^\star(\mathbf{k})$$

とおく．このとき正整数 m, n に対し，Li は

$$(-1)^m X_0^\star(m+n+1,n+1,s) - (-1)^n X_0^\star(m+n+1,m+1,s) \in \mathbb{Q}[\zeta(k) \mid k \geq 2]$$

を示した [36, Corollary 2.3]．

$$X_{\mathcal{A},0}(k,r,s) := \sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,r,s)} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}), \quad X^\star_{\mathcal{A},0}(k,r,s) := \sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,r,s)} \zeta^\star_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$$

とおく．

定理 1.3.27 (Sakurada)**.** 整数 $1 \leq s \leq m, n$ と素数 p で $p-1 \nmid m+n+1$ を満たすものに対し，

$$(-1)^m \sum_{\mathbf{k}\in I_0(m+n+1,n+1,s)} \zeta^\star_{<p}(\mathbf{k}) \equiv (-1)^n \sum_{\mathbf{k}\in I_0(m+n+1,m+1,s)} \zeta^\star_{<p}(\mathbf{k}) \pmod{p}$$

が成り立つ. 特に

$$(-1)^m X^\star_{\mathcal{A},0}(m+n+1, n+1, s) = (-1)^n X^\star_{\mathcal{A},0}(m+n+1, m+1, s)$$

が成り立つ.

注意 1.3.28. 上の定理は

$$X_{\mathcal{A},0}(m+n+1, n+1, s) = X_{\mathcal{A},0}(m+n+1, m+1, s)$$

と書き直す事ができる.

有限多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$ 上の線型関係式は, これらの他にも, 例えば [23], [24], [44], [45], [46] などが知られている.

2 対称多重ゼータ値

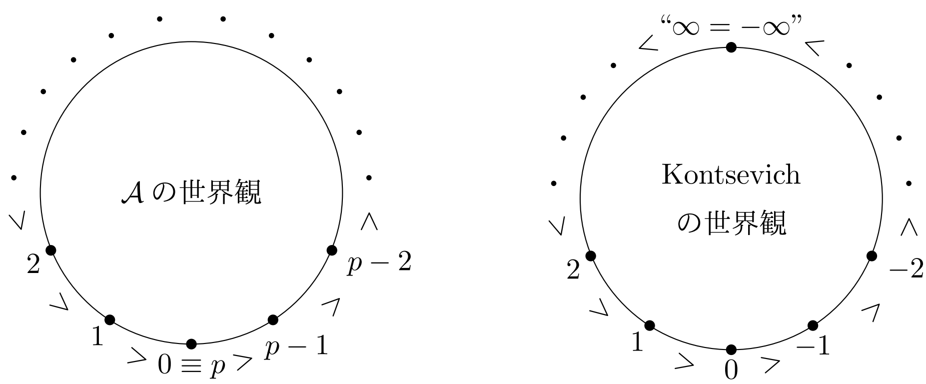
この節では対称多重ゼータ値を定義し, 2 つの $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathcal{Z}$ と $\mathcal{Z}_\mathcal{A}$ の驚くべき関係を示唆する Kaneko–Zagier 予想を定式化する.

2.1 Kontsevich が Zagier に宛てた手紙

まず Kontsevich が Zagier に宛てた手紙の中にある示唆から始める. 彼は $\zeta_{<p}(k_1, k_2) \bmod p$ の和の動く範囲の上限 p について "mod p で考えているのだから上限の p を 0 として扱ったものを考えるとどうなるか" と提案した. これを文字通りそのまま書くと

$$\sum_{0<n_1<n_2<0} \frac{1}{n_1^{k_1} n_2^{k_2}} \tag{1}$$

となる. $0 < n_1 < n_2 < 0$ の部分はこのままでは意味不明であるが, 次のように考えてみよう. つまり $-\infty$ から ∞ まで並んでいる通常の数直線を, 左の彼方の 0 から出発し, ∞ と $-\infty$ を同一視して "$\infty = -\infty$" を飛び越えて負の数が小さい順に並んで, 最終的に 0 に至ると考える. この世界観は次のような図を書いてみると $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ に "似ている" ことがわかりやすいと思う.



この範囲で $n_1 < n_2$ を満たす n_1, n_2 にわたる和を考えるのである．すると (1) は

$$\left(\sum_{0<n_1<n_2} + \sum_{0<n_1<\infty(\text{``=''})-\infty<n_2<0} + \sum_{n_1<n_2<0}\right)\frac{1}{n_1^{k_1}n_2^{k_2}}$$
$$= \zeta^*(k_1,k_2) + (-1)^{k_2}\zeta^*(k_1)\zeta^*(k_2) + (-1)^{k_1+k_2}\zeta^*(k_2,k_1)$$

を考えていることに対応している．ここで (収束インデックスとは限らない) インデックス $\mathbf{k}$ に対し $\zeta^*(\mathbf{k})$ は調和正規化多項式 $\zeta^*(\mathbf{k};T)$(金子氏の報告記事 [28, 定義 4.1] を参照) の定数項であり, 調和正規化多重ゼータ値と呼ばれる．k_1, k_2 が 1 である場合を考慮して調和正規化多重ゼータ値を考えていることに注意する．以上の考察は一般の深さでも同様に行えるので, 次に定義する和が Kontsevich の示唆に現れる対象と思うことができる．

定義 2.1.1. インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対し

$$\zeta_{\mathcal{S}}^*(\mathbf{k}) = \sum_{i=0}^{r}(-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r}\zeta^*(k_1,\ldots,k_i)\zeta^*(k_r,\ldots,k_{i+1})$$

とおく．

正規化多項式の定義から正規化多重ゼータ値は多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$ 上の線型結合であるので, $\zeta_{\mathcal{S}}^*(\mathbf{k}) \in \mathcal{Z}$ であることに注意する．

Kontsevich の示唆を具現化した対象 $\zeta_{\mathcal{S}}^*(\mathbf{k})$ は, 定義された時点では良い対象なのかどうかまだわからない．次の定理は $\zeta_{\mathcal{S}}^*(\mathbf{k})$ が "十分たくさん存在する" ことを示しており, その意味で $\zeta_{\mathcal{S}}^*(\mathbf{k})$ は "良い" 対象だと思える．

定理 2.1.2 (Yasuda [64, Theorem 6.1])**.** 非負整数 k に対し

$$\mathcal{Z}_k = \langle \zeta_{\mathcal{S}}^*(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \text{ はインデックスで } \mathrm{wt}(\mathbf{k}) = k\rangle_{\mathbb{Q}}$$

が成り立つ．

この定理を踏まえて, Kaneko–Zagier 予想とは以下の主張である．

予想 2.1.3 (Kaneko–Zagier)**.** 対応

$$\rho : \mathcal{Z} = \langle \zeta_{\mathcal{S}}^*(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \text{ はインデックス } \rangle_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathcal{Z}_{\mathcal{A}}\,; \quad \zeta_{\mathcal{S}}^*(\mathbf{k}) \mapsto \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$$

は well-defined な $\mathbb{Q}$ 代数の準同型を与え, $\mathrm{Ker}(\rho) = \zeta(2)\mathcal{Z}$ が成り立つ．

注意 2.1.4.
1. ρ が well-defined であれば, ρ が生成元を生成元に移すことから ρ の全射性が従う．したがって予想を仮定すると, $\mathbb{Q}$ 代数の同型 $\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z} \xrightarrow{\cong} \mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ が ρ から誘導される．この同型を Kaneko–Zagier 予想と呼ぶことも多い．

2. $\zeta(\mathbf{k})$ に対応する $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ の元は $(\zeta_p^{\mathrm{De}}(\mathbf{k}) \bmod p)_p$ であることが知られている．ただし $\zeta_p^{\mathrm{De}}(\mathbf{k})$ は Deligne の p 進多重ゼータ値 (原氏の報告記事 [11], 安田氏の報告記事 [65], 関氏の報告記事 [57] を参照).

定義 2.1.5. 対称多重ゼータ値 $\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$ を

$$\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}) := \zeta_{\mathcal{S}}^{*}(\mathbf{k}) \bmod \zeta(2)\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$$

と定義する．

Kaneko–Zagier 予想が正しいとすると, $\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$ は $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ が満たす $\mathbb{Q}$ 上の代数/線型関係式と全く同じ代数/線型関係式を満たすことになる．つまり mod p の世界の有限多重ゼータ値の関係式が**通常の多重ゼータ値の言葉のみを用いて表現できる**ということである．これは非常に興味深い．

2.2 定義に関する補足

この節では対称多重ゼータ値の定義に関していくつか補足をする．

2.2.1 正規化多項式を用いた場合とそのシャッフル類似

Kontsevich の示唆を数学的に厳密にすることで対称多重ゼータ値を定義したが, その際調和正規化多重ゼータ値を用いた．正規化多重ゼータ値は正規化多項式の定数項であったが, 実は定数項でなく正規化多項式そのものを用いても同じものが定義される．また, シャッフル正規化を用いても同様の和が定義されるが, 調和正規化の場合と同様に, 正規化多項式を用いて定義しても T によらないことが示される．

命題 2.2.1. インデックス $\mathbf{k}$ と $\bullet \in \{*, ш\}$ に対し $\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\mathbf{k}), \zeta_{\mathcal{S}}^{\bullet}(\mathbf{k};T)$ を $\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(\mathbf{k})$ と同様に定義する：

$$\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\mathbf{k}) = \sum_{i=0}^{r}(-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r}\zeta^{ш}(k_1,\ldots,k_i)\zeta^{ш}(k_r,\ldots,k_{i+1}),$$

$$\zeta_{\mathcal{S}}^{\bullet}(\mathbf{k};T) = \sum_{i=0}^{r}(-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r}\zeta^{\bullet}(k_1,\ldots,k_i;T)\zeta^{\bullet}(k_r,\ldots,k_{i+1};T).$$

このとき $\zeta_{\mathcal{S}}^{\bullet}(\mathbf{k}) = \zeta_{\mathcal{S}}^{\bullet}(\mathbf{k};T)$ が成り立つ．つまり $\zeta_{\mathcal{S}}^{\bullet}(\mathbf{k};T)$ は T によらない実数で, しかも $\zeta_{\mathcal{S}}^{\bullet}(\mathbf{k})$ と一致する．さらに $k := \mathrm{wt}(\mathbf{k})$ とおくと $\zeta_{\mathcal{S}}^{\bullet}(\mathbf{k}) \in \mathcal{Z}_k$ が成り立つ．

証明は $\zeta_{\mathcal{S}}^{\bullet}(\mathbf{k})$ を母函数で表示し, 式変形により T が現れる項を消すことで行われる．その際次の等式が重要である．詳細は [30] に譲る．

補題 2.2.2. 収束インデックス $\mathbf{k}$ と $\bullet \in \{*, ш\}$ に対し

$$\sum_{s=0}^{\infty} \zeta^{\bullet}(\mathbf{k}, \{1\}^s; T) x^s = e^{Tx} \sum_{i=0}^{\infty} \zeta^{\bullet}(\mathbf{k}, \{1\}^i) x^i$$

が成り立つ.

この補題は [20, Proposition 10] の書き換えである. また [20, Corollary 5] から簡単に導くこともできる. 金子氏の報告記事 [28] の 5.1 節および 5.2 節も参照.

注意 2.2.3. $\zeta_{\mathcal{S}}^{\bullet}(\mathbf{k}) = \zeta_{\mathcal{S}}^{\bullet}(\mathbf{k}; T)$ は代数的に示すこともできる. つまり $\bullet \in \{*, ш\}$ に対し, $\mathfrak{H}_{\bullet}^{1}$ の元

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r} (e_{k_1} \cdots e_{k_i}) \bullet (e_{k_r} \cdots e_{k_{i+1}})$$

が $\mathfrak{H}_{\bullet}^{0}$ に属することを示すことができる ($e_k := e_1 e_0^{k-1}$ であった). これは実際に積 $\bullet$ を実行してみると, $\mathfrak{H}_{\bullet}^{0}$ に属さない項がうまく相殺されて現れないことから従う.

2.2.2　$\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(\mathbf{k})$ と $\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\mathbf{k})$ のズレ

2 種類の正規化多項式は $\mathbb{R}$ 線型写像 ρ によって $\zeta^{ш}(\mathbf{k}; T) = \rho(\zeta^{*}(\mathbf{k}; T))$ を満たすのであった (正規化の基本定理. 詳しくは金子氏の報告記事 [28, 定理 4.4] を参照). それでは $\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(\mathbf{k})$ と $\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\mathbf{k})$ はどれくらいずれているのだろうか. $\zeta^{\bullet}(\mathbf{k}; T)$ を具体的に計算し複シャッフル関係式を駆使すると, 例えば

$$\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(2,1,2,1) = \zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(2,1,2,1) = -\frac{88}{35}\zeta(2)^3 + \frac{9}{2}\zeta(3)^2$$

を示すことができる.

また

$$\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(2,1,1,2) = \frac{247}{105}\zeta(2)^3 - 6\zeta(3)^2,$$
$$\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(2,1,1,2) = \frac{352}{105}\zeta(2)^3 - 6\zeta(3)^2$$

が成り立つ. 他にも

$$\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(2,1,4,1) = \zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(2,1,4,1) = -\frac{3391}{2625}\zeta(2)^4 + \frac{5}{2}\zeta(3)\zeta(5) + \frac{9}{5}\zeta(3,5),$$
$$\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(2,1,1,4) = \frac{94}{2625}\zeta(2)^4 + \frac{9}{5}\zeta(3,5), \zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(2,1,1,4) = \frac{1144}{2625}\zeta(2)^4 + \frac{9}{5}\zeta(3,5),$$

が成り立つ. $\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(2,1,1,2), \zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(2,1,1,2)$ および $\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(2,1,1,4), \zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(2,1,1,4)$ は $\zeta(2)$ のべきの有理数倍を無視すると一致しているが, 実は一般に次が成り立つ.

命題 2.2.4. インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(\mathbf{k}) - \zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\mathbf{k}) \in \zeta(2)\mathcal{Z}$$

が成り立つ.

この命題も母函数を用いて再定式化し, 補題 2.2.2 と

$$\frac{1}{\Gamma(1-x)\Gamma(1+x)} = \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n}x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{\pi^2}{6}x^2 + \cdots$$

を用いて証明される (この等式は, 例えば [3, (35)]). また, 実際には

$$\begin{aligned}&\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(k_1,\ldots,k_r) = \zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(k_1,\ldots,k_r)\\ &+\sum_{m=1}^{r/2}(-1)^m\zeta(\{2\}^m)\sum_{\substack{0<i\le r-2m\\ k_{i+1}=\cdots=k_{i+2m}=1}}(-1)^{k_{i+2m+1}+\cdots+k_r}\zeta^{ш}(k_1,\ldots,k_i)\zeta^{ш}(k_r,\ldots,k_{i+2m+1})\end{aligned}$$

が成り立っている [26, p187]. 右辺の二つ目の和の i は, k_{i+1} から連続して偶数 $2m$ 個 1 が並ぶような i に渡っていて, そのような i がなければ和は 0 とする. 正整数 m に対し $\zeta(\{2\}^m) \in \zeta(2)\mathcal{Z}$ に注意する.

以上より, 対称多重ゼータ値の定義は, シャッフル正規化多項式 (あるいはシャッフル正規化多重ゼータ値) を用いても, $\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$ の元としては同じものが定義されることがわかった.

注意 2.2.5. 命題 2.2.4 は, より精密に

$$\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(\mathbf{k}) - \zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\mathbf{k}) \in \zeta(2)\mathcal{Z}_{k-2}$$

がわかる. ただし $k := \mathrm{wt}(\mathbf{k})$. これを用いると非負整数 k に対し

$$\mathcal{Z}_k = \langle \zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k}\ \text{はインデックスで}\ \mathrm{wt}(\mathbf{k}) = k\rangle_{\mathbb{Q}}$$

を示すことができる. 詳しくは [65, Theorem 6.1] を参照

2.2.3 新たな順序 $\prec$ とその言い換え

Kontsevich の示唆を数学的に厳密にする際, 数直線に並んでいる数を 0 から正の方向へ出発し, "$\infty = -\infty$" を飛び越えて負の整数を小さい順に進んで 0 に至る, という新たな世界観を考察した. これは $\mathbb{Z} \cup \{\infty = -\infty\}$ に

$$0 \prec 1 \prec 2 \prec \cdots \prec (\infty = -\infty) \prec \cdots \prec -2 \prec -1 \prec 0$$

という順序 $\prec$ を新たに導入していることに相当する. このとき 0 でない整数 $m_1, \ldots, m_r$ に対し, $m_1 \prec \cdots \prec m_r$ であることと, 通常の不等号について

$$\frac{1}{m_1} > \cdots > \frac{1}{m_r}$$

であることが同値である. 実際 $m_i \prec (\infty = -\infty) \prec m_{i+1}$ であることと $1/m_i > 0 > 1/m_{i+1}$ であることが同値になる.

この同値性は Yasuda によって指摘された. 例えば Yasuda は [64] において $\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(\mathbf{k})$ の定義に $\frac{1}{m_1} > \cdots > \frac{1}{m_r}$ を採用している.

2.2.4 対称多重ゼータ値の "級数表示"

正整数 M とインデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ に対し

$$\zeta_{<M}(\mathbf{k})=\sum_{0<m_1<\cdots<m_r<M}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}$$

とおくと, $\mathbf{k}$ が収束インデックスならば

$$\zeta(\mathbf{k})=\lim_{M\to\infty}\zeta_{<M}(\mathbf{k})$$

が成り立つことは容易に示すことができる．実は $\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(\mathbf{k})$ に対しても類似の表示が知られている．正整数 M とインデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta_{\mathcal{S},M}^{*}(\mathbf{k}):=\sum_{\substack{m_1\prec\cdots\prec m_r\\ 0<|m_1|,\ldots,|m_r|<M}}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}$$

とおく．$m_1\prec\cdots\prec m_r$ のうち m_i と m_{i+1} の間に 0 があるとすると, (通常の意味で) $0<m_1<\cdots<m_i$ が正, $m_{i+1}<\cdots<m_r<0$ が負ということになる．したがって

$$\zeta_{\mathcal{S},M}^{*}(\mathbf{k})=\sum_{i=0}^{r}(-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r}\zeta_{<M}(k_1,\ldots,k_i)\zeta_{<M}(k_r,\ldots,k_{i+1}) \tag{2}$$

がわかる．

命題 2.2.6 (Yasuda, Zagier)**.** 全てのインデックス $\mathbf{k}$ に対し $\lim_{M\to\infty}\zeta_{\mathcal{S},M}^{*}(\mathbf{k})$ は収束し,

$$\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(\mathbf{k})=\lim_{M\to\infty}\zeta_{\mathcal{S},M}^{*}(\mathbf{k})=\lim_{M\to\infty}\sum_{\substack{m_1\prec\cdots\prec m_r\\ 0<|m_1|,\ldots,|m_r|<M}}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}$$

が成り立つ．

$\zeta_{\mathcal{S},M}^{*}(\mathbf{k})$ は定義から調和関係式

$$\zeta_{\mathcal{S},M}^{*}(\mathbf{k}*\mathbf{l})=\zeta_{\mathcal{S},M}^{*}(\mathbf{k})\zeta_{\mathcal{S},M}^{*}(\mathbf{l}) \tag{3}$$

を満たすことに注意する．つまり通常の多重ゼータ値の級数表示に現れる不等式 $m_1<\cdots<m_r$ の部分を新たな不等式 $m_1\prec\cdots\prec m_r$ に置き換えて全く同様に証明することができる．(3) の両辺の極限をとることで, $\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(\mathbf{k})$ が調和関係式を満たすことがわかる．

系 2.2.7 ($\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(\mathbf{k})$ の調和関係式)**.** インデックス $\mathbf{k},\mathbf{l}$ に対し

$$\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(\mathbf{k}*\mathbf{l})=\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(\mathbf{k})\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(\mathbf{l})$$

が成り立つ．

注意 2.2.8. 命題 2.2.6 は $\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(\mathbf{k})$ の級数表示であるが, つい最近筆者と Yamamoto によって $\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\mathbf{k})$ の級数表示が得られている．つまり $\zeta_{\mathcal{S},M}^{*}(\mathbf{k})$ に対応する有理数 $\zeta_{\mathcal{S},M}^{ш}(\mathbf{k})$ を具体的に与え, $\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\mathbf{k})=\lim_{M\to\infty}\zeta_{\mathcal{S},M}^{ш}(\mathbf{k})$ を示すことができる．多重ゼータ値の積分表示に由来するシャッフル正規化多重ゼータ値が級数表示を持つことは興味深い．

2.3 対称多重ゼータ値の具体的な値と関係式

この小節では対称多重ゼータ値の知られている具体的な値と $\mathbb{Q}$ 上の線型関係式を紹介する. Kaneko–Zagier 予想を信じると, 対称多重ゼータ値の間の $\mathbb{Q}$ 上の線型関係式は, 有限多重ゼータ値が満たす $\mathbb{Q}$ 上の線型関係式と全く同じ関係式を満たすことになる. 知られている関係式のうちいくつかは, 代数的に ($\mathfrak{H}^1$ のレベルで) 証明されており, そのような場合は有限多重ゼータ値の場合にも対称多重ゼータ値の場合にも適用できて, 同じ証明を与えたことになる. 一方で (驚くべきことに) 同一の関係式であっても, 有限多重ゼータ値の場合と対称多重ゼータ値の場合で証明が全く異なるものも知られており, Kaneko–Zagier 予想の深遠さを物語っている.

2.3.1 具体的な値

はじめに具体的な値の例を紹介する.

例 2.3.1 ([26, 例 4.3])**.** まず深さが 1 の場合, $\zeta_{\mathcal{S}}(k)$ $(k \geq 1)$ は有限多重ゼータ値と同じで 0 になる. 実際に正整数 k に対し $\zeta^*_{\mathcal{S}}(k)$ を定義通り計算すると

$$\zeta^*_{\mathcal{S}}(k) = (-1)^k\zeta^*(k) + \zeta^*(k) = \begin{cases} 2\zeta(k) & k \text{ が偶数} \\ 0 & k \text{ が奇数} \end{cases}$$

がわかる. k が偶数の場合は $\zeta(k) \in \mathbb{Q}\pi^k \subset \zeta(2)\mathcal{Z}$ であるので, 結局 $\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$ において $\zeta_{\mathcal{S}}(k) = 0$ がわかる.

次に深さが 2 の場合を計算してみよう. まず正の整数 k_1, k_2 に対し $\zeta^*_{\mathcal{S}}(k_1, k_2)$ を書き下すと

$$\zeta^*_{\mathcal{S}}(k_1, k_2) = (-1)^{k_1+k_2}\zeta^*(k_2, k_1) + (-1)^{k_2}\zeta^*(k_1)\zeta^*(k_2) + \zeta^*(k_1, k_2)$$

となる. $k_1 + k_2$ が偶数の場合は $\zeta^*(k_1)\zeta^*(k_2) = \zeta^*(k_1, k_2) + \zeta^*(k_2, k_1) + \zeta^*(k_1 + k_2) \equiv \zeta^*(k_1, k_2) + \zeta^*(k_2, k_1) \bmod \zeta(2)\mathcal{Z}$ なので

$$\zeta^*_{\mathcal{S}}(k_1, k_2) \equiv (1 + (-1)^{k_2})\zeta^*(k_1)\zeta^*(k_2) \bmod \zeta(2)\mathcal{Z}$$

を得る. よって k_2 が奇数の場合は $\zeta^*_{\mathcal{S}}(k_1, k_2) \equiv 0 \bmod \zeta(2)\mathcal{Z}$ がわかる. k_2 が偶数の場合は k_1 も偶数となるので結局この場合も $\zeta^*_{\mathcal{S}}(k_1, k_2) \equiv 0 \bmod \zeta(2)\mathcal{Z}$ がわかる.

$k_1 + k_2$ が奇数の場合は k_1 または k_2 が偶数なので $\zeta^*(k_1)\zeta^*(k) \equiv 0 \bmod \zeta(2)\mathcal{Z}$ となる. さらに [7, (5)] または [66, Proposition 7] を用いると

$$\zeta^*_{\mathcal{S}}(k_1, k_2) \equiv \zeta^*(k_1, k_2) - \zeta^*(k_2, k_1) \equiv (-1)^{k_2}\binom{k_1 + k_2}{k_1}\zeta(k_1 + k_2) \bmod \zeta(2)\mathcal{Z}$$

を得る. さらにこの式は $k_1 + k_2$ が偶数の場合も (両辺共に 0 で) 成り立つので, 結局正の整数 k_1, k_2 に対し

$$\zeta_{\mathcal{S}}(k_1, k_2) = (-1)^{k_2}\binom{k_1 + k_2}{k_1}\zeta(k_1 + k_2) \bmod \zeta(2)\mathcal{Z}$$

が成り立つ. これは $\zeta_{\mathcal{A}}(k_1, k_2) = (-1)^{k_2}\binom{k_1+k_2}{k_1}Z(k_1 + k_2)$ に対応しており, この対応からも $Z(k)$ が Riemann ゼータ値 $\zeta(k)$ の $\mathcal{A}$ における正しい対応物とみなすことができる.

他にも正整数 k, n に対して $\zeta_{\mathcal{S}}(\{k\}^n) = 0$ が [25] の手法によりわかる.

2.3.2　線型関係式

次に $\mathbb{Q}$ 上の線型関係式を紹介する.

例 2.3.2 ([26, 命題 4.4])**.** 対称多重ゼータ値についても調和関係式 (代数関係式) とシャッフル関係式が成り立つことが知られている.

$$\begin{cases} \zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k} * \mathbf{l}) = \zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{l}) \\ \zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k} ш \mathbf{l}) = (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{l})}\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}, \bar{\mathbf{l}}). \end{cases}$$

調和関係式は mod $\zeta(2)\mathcal{Z}$ する前の式 (系 2.2.7) から従う.

シャッフル関係式については証明が複数知られている. まず調和関係式の場合と同様に, mod$\zeta(2)\mathcal{Z}$ をする前の式

$$\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\mathbf{k} ш \mathbf{l}) = (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{l})}\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\mathbf{k}, \bar{\mathbf{l}}) \tag{4}$$

を経由する場合である. まずは Kaneko と Zagier がこの式を母函数表示を用いて再定式化し, 対称群 $\mathfrak{S}_r$ の $\mathbb{Z}$ 上の群環 $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_r]$ のある関係式に帰着させ, その関係式を Yasuda が示すことで証明された. この証明については [27] にもう少し詳しく書かれている. また Jarossay はこの等式を KZ 結合子 (原田氏の報告記事 [12] を参照) を用いて証明している [22, Théorèm 1.7 i)]. また筆者と Yamamoto は, 注意 2.2.8 で触れた $\zeta_{\mathcal{S},M}^{ш}(\mathbf{k})$ がシャッフル関係式を満たすことを, 第 2 節で紹介した有限多重ゼータ値のシャッフル関係式の証明方法と同様の手法で証明した. $M \to \infty$ とすると (4) を復元できるので, $\zeta_{\mathcal{S},M}^{ш}(\mathbf{k})$ のシャッフル関係式は $\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\mathbf{k})$ のシャッフル関係式の一つの精密化と言える.

$\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\mathbf{k})$ のシャッフル関係式 (4) を経由しない証明も知られている. Hirose は $\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$ の持ち上げとして, $\zeta^{RS}(\mathbf{k})$ という $\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\mathbf{k})$ とは異なる持ち上げを, ある積分で定義される複素数として定義し, $\zeta^{RS}(\mathbf{k})$ がシャッフル関係式を満たすことを証明した [13, Theorem 7]. $\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$ のシャッフル関係式は $\zeta^{RS}(\mathbf{k})$ のシャッフル関係式の実部を取ることで得られる. 通常の多重ゼータ値のシャッフル関係式が多重ゼータ値の積分表示を用いて証明されたことを思い出すと, Hirose の証明は非常に自然である. ちなみに $\zeta^{RS}(\mathbf{k})$ は Bachmann, Takeyama および Tasaka [4] によって定義された $\xi(\mathbf{k})$ と一致することが示されている [13, Remark 11].

また (4) において $\mathbf{k} = \emptyset$ とすると, $\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}$ に対して反転公式が成立する. したがって対称多重ゼータ値に対しても反転公式

$$\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{l}) = (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{l})}\zeta_{\mathcal{S}}(\bar{\mathbf{l}})$$

が成り立つ.

シャッフル関係式以外にも, 対称多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$ 上の線型関係式で知られているものがある. それらは $\zeta_{\mathcal{A}}$(または $\zeta_{\mathcal{A}}^{\star}$) を $\zeta_{\mathcal{S}}$(または $\zeta_{\mathcal{S}}^{\star}$) に置き換えただけで全く同じ関係式になってい

る．ただし

$$\zeta_{\mathcal{S}}^{\star}(\mathbf{k}) := \sum_{\mathbf{k}' \preceq \mathbf{k}} \zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}')$$

とした．

和公式は [39, Theorem 1.2], Hoffman 双対関係式は [4, Corollary 2.17] および [22, Corollarie 1.12], 大野型関係式は [50, Remark 1.5] および [14, Theorem 1.12], 導分関係式は [40, Theorem 2.1] で示されている．また論文中で触れられていないが, [53] の有限多重ゼータ値に対する Bowman-Bradley 型定理の証明は代数的なので, $\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$ に対しても適用できる．[44], [45], [46] も代数的な手法を用いており, 対称多重ゼータ値に対しても成立する．さらに Theorem 1.3.27 の $\mathcal{S}$-類似についても Sakurada によって証明が宣言されている．また筆者と Yamamoto による $\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\mathbf{k})$ の級数表示と部分分数分解を駆使することで [23, Proposition 3.4] の $\mathcal{S}$-類似を示すことができる．

3 課題

この節では考えられる課題を列挙する．

1. 成立すると予想されている等式をいくつか紹介する．正整数 k, r, 有理数 $n_1, \ldots, n_r$ と $\bullet \in \{\emptyset, \star\}$ に対し

$$W_k^{\bullet}(n_1, \ldots, n_r) := \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_r \geq 1 \\ k_1 + \cdots + k_r = k}} n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r} \zeta_{\mathcal{A}}^{\bullet}(k_1, \ldots, k_r)$$

とおく．このとき次が成り立つであろう [15, Conjecture 9, 10, 11].

(a) $W_k^{\bullet}(1, 1, 2, 3, \ldots, r-1, r) \stackrel{?}{=} 0$.

(b) r が奇数なら $W_k^{\bullet}(1, 1, 2, 3, \ldots, r-1, r, r) \stackrel{?}{=} 0$.

(c) 正整数 k, r および有理数 a, b に対し

$$W_k^{\bullet}(a, a+b, a+2b, \ldots, a+rb) \stackrel{?}{=} W_k^{\bullet}(b, a+b, a+2b, \ldots, a+rb).$$

ちなみに

$$W_k^{\bullet}(1, \ldots, 1, \underset{\widehat{i}}{2}, 1, \ldots, 1) = 0 \ (1 \leq i \leq r), \tag{5}$$

は知られている ([15, Theorem 2 (1.1)], [41, Theorem 1.1])．また (5) は対称多重ゼータ値に対しても成立する [41, Theorem 1.1]. (a)(b)(c) は対称多重ゼータ値に対して成り立つだろうか.

2. 母函数の間の等式として

$$\sum_{r=0}^{\infty} \zeta_{\mathcal{A}}(\{1,2\}^r) x^r \stackrel{?}{=} \exp\left(\sum_{\substack{n=1 \\ n:\mathrm{odd}}}^{\infty} \zeta_{\mathcal{A}}(1, 3n-1) \frac{x^n}{n^2} \right)$$

が予想されている [26, p182]. これは古典的な式

$$1+\sum_{r=0}^{\infty}\zeta(\{k\}^r)x^r=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\zeta(kn)}{n}x^n\right)$$

の $\mathcal{A}$-類似 (の $k=3$ の場合) である. 対称多重ゼータ値の場合も成り立つだろうか.

3. ([56, Question 5.21]) t 多重ゼータ値と呼ばれる概念が Yamamoto によって導入されている [61]. これは多重ゼータ値と多重ゼータスター値を "補間" するもので, 収束インデックスに対し

$$\zeta^t(\mathbf{k}):=\sum_{\mathbf{k}'\preceq\mathbf{k}}t^{\sigma(\mathbf{k}')}\zeta(\mathbf{k}')\in\mathbb{R}[t]$$

で定義される. 定義から $\zeta^0(\mathbf{k})=\zeta(\mathbf{k}),\zeta^1(\mathbf{k})=\zeta^\star(\mathbf{k})$ である. また例えば $\zeta^t(k_1,k_2,k_3)=\zeta(k_1,k_2,k_3)+(\zeta(k_1+k_2,k_3)+\zeta(k_1,k_2+k_3))t+\zeta(k_1+k_2+k_3)t^2$ である. Yamamoto は t 多重ゼータ値に対する和公式を証明している [61, Theorem 1.1]. 一方 Seki は t 有限多重ゼータ値を定義し, 収束インデックスに対する t 有限多重ゼータ値の和公式を証明している. つまり

$$\zeta^t_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}):=\sum_{\mathbf{k}'\preceq\mathbf{k}}t^{\sigma(\mathbf{k}')}\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}')\in\mathcal{A}[t]$$

と定義すると,

$$\sum_{\mathbf{k}\in I_{k,r,r}}\zeta^t_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})=\left(\sum_{j=0}^{r-1}\left\{\binom{k-1}{j}+(-1)^r\binom{k-1}{r-1-j}\right\}t^j(1-t)^{r-1-j}\right)Z(k)$$

が成り立つ [56, Proposition 5.20]. これは t 多重ゼータ値の和公式の $\mathcal{A}$-類似とみなせるし, 有限多重ゼータ値の $i=r$ の場合の和公式を補間したものとみなすこともできる. そこで有限多重ゼータ値の和公式を $1\le i\le r-1$ の場合に補間すると, 右辺はどのような形になるだろうか. $i=r$ の場合のように (ある程度) 綺麗な形になるだろうか.

4. 有限多重ゼータ値はインデックスの成分が非正の場合でも定義ができたが, 成分が正とは限らないインデックスに対しても対称多重ゼータ値を定義できるように, 対称多重ゼータ値の定義を修正・拡張することはできるだろうか. もしできた場合, [32] や [63] の $\mathcal{S}$-類似は成り立つか.

5. 多重ゼータ値の間で成り立っている関係式について, $\mathcal{A}$-類似や $\mathcal{S}$-類似は存在するか. 例えば結合子関係式 (原田氏の報告記事 [12]) や積分級数等式 (川崎氏の報告記事 [31]), Hirose と Sato による合流関係式 ([16], [9] を参照) の $\mathcal{A}$-類似・$\mathcal{S}$-類似は存在するか.

6. 具体的に値が書ける有限多重ゼータ値や有限多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$ 上の線型関係式のうち, その $\mathcal{S}$-類似は成り立つか. 例えば値については定理 1.3.4, 定理 1.3.5, 線型関係式については定理 1.3.26, [24, Corollary 2.3, Corollary 2.5, Theorem 3.1] の $\mathcal{S}$-類似は成立するか.

7. 多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$ 上の線型関係式の族の間には包含関係が知られていることがある. 例えば双対関係式は大野関係式に含まれたり, 正規化複シャッフル関係式は結合子関係式に含まれる, など. 有限多重ゼータ値や対称多重ゼータ値でも類似の包含関係は成り立つか. 特に双対関係式が正規化複シャッフル関係式から導かれるか, という「双対関係式導出問題」は多重ゼータ値の長年の懸案事項であるが, 有限多重ゼータ値や対称多重ゼータ値の場合に, Hoffman 双対関係式に対して類似の包含関係を示すことはできるだろうか.

謝辞

素晴らしいサマースクールを企画してくださり, また講演の機会もいただきました世話人の佐久川憲児さん (京都大学), 田坂浩二さん (愛知県立大学), 三柴善範さん (福岡工業大学) に感謝申し上げます. また旅費を援助していただきました古庄英和先生 (名古屋大学) にも感謝申し上げます. レジュメや報告記事に関して, また打ち合わせ等で数々の有益なコメントをいただきました井原健太郎さん (近畿大学), 大野泰生先生 (東北大学), 金子昌信先生 (九州大学), 佐久川憲児さん, 斎藤新悟さん (九州大学), 関真一朗さん (東北大学), 田坂浩二さん, 中村弥生さん (近畿大学), 広瀬稔さん (九州大学), 三柴善範さん, 山本修司さん (慶應義塾大学) に感謝申し上げます.

参考文献

[1] K. Akagi, M. Hirose and S. Yasuda, Integrality of p-adic multiple zeta values and a bound for the space of finite multiple zeta values, in preparation.

[2] T. Aoki and Y. Ohno, Sum relations for multiple zeta values and connection formulas for the Gauss hypergeometric functions, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005), 329–337.

[3] 荒川恒男, 金子昌信, 多重ゼータ値入門, MI Lecture Note Vol. 23, (2010).

[4] H. Bachmann, Y. Takeyama, and K. Tasaka, Cyclotomic analogues of finite multiple zeta values, Compositio Mathematica, Volume **154**, Issue 12 (2018), 2701–2721.

[5] D. Bowman and D. M. Bradley, The algebra and combinatorics of shuffles and multiple zeta values, J. Combin. Theory Ser. A **97** (2002), no. 1, 43–61.

[6] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst, and P. Lisoněk, Combinatorial aspects of multiple zeta values, Electronic J. Combinatorics 5 (1998), R38 (12 pp).

[7] P. Cartier, On the double zeta values, in Galois-Teichmüller Theory and Arithmetic Geometry, H. Nakamura et. al. (eds.), Adv. Studies in Pure Math. **68** Math. Soc. Japan (2012), 91–119.

[8] P. Deligne and A. Goncharov, Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **38** (2005), 1–56.

[9] H. Furusho, The pentagon equation and the confluence relations, preprint available at arXiv:1809.00789.

[10] A. Granville, A decomposition of Riemann's zeta-function, in London Math. Soc. Lecture Note Ser. **247**, Cambridge (1997), 95–101.

[11] 原隆,「実 / 複素ゼータの世界」から「p 進多重ゼータの世界」へ, 本報告集 (2018).

[12] 原田遼太郎, KZ 方程式と KZ 結合子, 本報告集 (2018).

[13] M. Hirose, Double shuffle relations for refined symmetric zeta values, preprint available at arXiv:1807.04747.

[14] M. Hirose, K. Imatomi, H. Murahara and S. Saito, Ohno type relations for classical and finite multiple zeta-star values, preprint available at arXiv:1806.09299.

[15] M. Hirose, H. Murahara and S. Saito, Weighted sum formula for multiple harmonic sums modulo primes, preprint available at arXiv:1808.00844v1.

[16] M. Hirose and N. Sato, Iterated integrals on $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty, z\}$ and a class of relations among multiple zeta values, preprint available at arXiv:1801.03807.

[17] M. E. Hoffman, Multiple harmonic series, Pacific J. Math., **152** (1992), 275–290.

[18] M. E. Hoffman, Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums, Kyushu J. Math. **69** (2015), 345–366.

[19] Y. Horikawa, H. Murahara and K. Oyama, A note on derivation relations for multiple zeta values and finite multiple zeta values, preprint available at arXiv:1809.08389.

[20] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, Compositio Math. **142** (2006), 307–338.

[21] D. Jarossay, Indirect computation of p-adic cyclotomic multiple zeta values, preprint available at arXiv:1501.04893v4.

[22] D. Jarossay, Double mélange des multizêtas finis et multizêtas symétrisés, C. R. Acad. Sci. Paris, **352** (2014), 767–771.

[23] K. Kamano, Finite Mordell–Tornheim multiple zeta values, Funct. Approx. Comment. Math. **54** (2015), 65–72.

[24] K. Kamano, Weighted sum formulas for finite multiple zeta values, Journal of Number Theory **192** (2018), 168–180.

[25] 金子昌信, 有限多重ゼータ値 mod p と多重ゼータ値の関係式, 数理解析研究所講究録 第 **1813** 巻 (2012), 27–31.

[26] M. Kaneko, Finite multiple zeta values (有限多重ゼータ値), RIMS Kokyuroku Bessatsu **68** (2017), 175–190 (in Japanese).

[27] M. Kaneko, An introduction to classical and finite multiple zeta values, to appear in Publications Mathématiques de Besançon.

[28] 金子昌信, 多重ゼータ値導入 —定義から正規化まで—, 本報告集 (2018).

[29] M. Kaneko, K. Oyama and S. Saito, Analogues of the Aoki-Ohno and Le-Murakami relations for finite multiple zeta values, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1–7. doi:10.1017/S0004972718001260.

[30] M. Kaneko and D. Zagier, Finite multiple zeta values, in preparation.

[31] 川崎菜穂, Yamamoto 積分表示と積分級数等式, 本報告集 (2018).

[32] Y. Komori, Finite multiple zeta values, multiple zeta functions and multiple Bernoulli polynomials, Kyushu J. Math. **72** (2018), 333–342.

[33] H. Kondo, S. Saito and T. Tanaka, The Bowman-Bradley theorem for multiple zeta-star values, J. Number Theory **132** (2012), no. 9, 1984–2002.

[34] M. Kontsevich and D. Zagier, Periods, Mathematics Unlimited 2001 and Beyond. Springer (2001), 771–808.

[35] T. Q. T. Le and J. Murakami, Kontsevich's integral for the Homfly polynomial and relations between values of multiple zeta functions, Topology Appl., **62** (1995), 193–206.

[36] Z-h. Li, On a conjecture of Kaneko and Ohno, Pacific J. Math. **257** (2012), 419–430.

[37] S. Muneta, On some explicit evaluations of multiple zeta-star values, Journal of Number Theory **128** (2008), 2538–2548.

[38] S. Muneta, A note on evaluations of multiple zeta values, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 931–935.

[39] H. Murahara, A note on finite real multiple zeta values, Kyushu J. Math. **70** (2016), 197–204.

[40] H. Murahara, Derivation relations for finite multiple zeta values, Int. J. Number Theory **13** (2017), 419–427.

[41] H. Murahara, An algebraic proof of the weighted sum formula for finite and symmetric multiple zeta(-star) values, preprint available at arXiv:1808.01430v2.

[42] H. Murahara and T. Onozuka, Derivation relation for finite multiple zeta values in $\widehat{\mathcal{A}}$, preprint available at arXiv:1809.02752.

[43] H. Murahara, T. Onozuka and S. Seki, Bowman-Bradley type theorem for finite multiple zeta values in $\mathcal{A}_2$, preprint available at arXiv:1810.10803.

[44] H. Murahara and T. Murakami, On a generalization of restricted sum formula for multiple zeta values and finite multiple zeta values, preprint available at arXiv:1803.0875.

[45] H. Murahara and S. Saito, Restricted sum formula for finite multiple and symmetric multiple zeta values, preprint available at arXiv:1801.02772.

[46] H. Murahara and M. Sakata, On multiple zeta values and finite multiple zeta values of maximal height, Int. J. Number Theory **14** (2018), 975–987.

[47] M. Ono, Finite multiple zeta values associated with 2-colored rooted trees, Journal of Number Theory, Volume **181**, (2017), 99–116.

[48] M. Ono, New functional equations of finite multiple polylogarithms, to appear in Tohoku Mathematical Journal, available at arXiv:1706.09136.

[49] M. Ono and S. Yamamoto, Shuffle product of finite multiple polylogarithms, manuscripta mathematica **152** (2017), 153–166.

[50] K. Oyama, Ohno-type relation for finite multiple zeta values, Kyushu J. Math. **72** (2018), 277–285.

[51] Kh. Hessami Pilehrood, T. Hessami Pilehrood, and R. Tauraso, New properties of multiple harmonic sums modulo p and p-analogues of Leshchiner's series, Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), 3131–3159.

[52] S. Saito and N. Wakabayashi, Sum formula for finite multiple zeta values, J. Math. Soc. Japan **67** (2015), 1069–1076.

[53] S. Saito and N. Wakabayashi, Bowman-Bradley type theorem for finite multiple zeta values, Tohoku Mathematical Journal (2) **68** (2016), 241–251.

[54] K. Sakugawa and S. Seki, On functional equations of finite multiple polylogarithms, Journal of Algebra **469** (2017), 323–357.

[55] S. Seki, The $\boldsymbol{p}$-adic duality for the finite star-multiple polylogarithms, to appear in Tohoku Mathematical Journal.

[56] S. Seki, Finite multiple polylogarithms, doctoral dissertation, Osaka University, 2017.

[57] 関真一朗, 「$\mathcal{F}$-有限多重ゼータ値」から「$\widehat{\mathcal{F}}$-有限多重ゼータ値」へ: ただし, $\mathcal{F}=\mathcal{A}$ or $\mathcal{S}$, 本報告集 (2018).

[58] S. Seki and S. Yamamoto, Ohno-type identities for multiple harmonic sums, preprint available at arXiv:1806.04785.

[59] T. Tanaka, A simple proof of certain formula for multiple zeta-star values, J. Algebra Number Theory: Adv. Appl. **3** (2) (2010), 97–110.

[60] T. Terasoma, Mixed Tate motives and multiple zeta values, Invent. Math. **149** (2002), 339–369.

[61] S. Yamamoto, Interpolation of multiple zeta and zeta-star values, Journal of Algebra **385**(1) (2013), 102–114.

[62] S. Yamamoto, Explicit evaluation of certain sums of multiple zeta-star values, Funct. Approx. Comment. Math. Volume **49**, Number 2 (2013), 283–289.

[63] G. Yamashita, On finite multiple zeta values of non-positive weight, preprint.

[64] S. Yasuda, Finite real multiple zeta values generate the whole space Z, Int. J. Number Theory **12** (2016), 787–812.

[65] 安田正大, 「p 進多重ゼータ値」から「有限多重ゼータ値」へ, 本報告集 (2018).

[66] D. Zagier, Evaluation of the multiple zeta values $\zeta(2,\cdots,2,3,2,\cdots,2)$, Annals of Math., **175** (2012), 977–1000.

[67] J. Zhao, Wolstenholme type theorem for multiple harmonic sums, Int. J. Number Theory, **4-1** (2008), 73–106.