アナログパルス変調

- 目的：適宜な時間間隔で取られた信号の値だけで情報を完全に転送する
  - 情報信号：帯域制限
- パルス変調

パルス列を搬送波として信号に応じて変調する方式

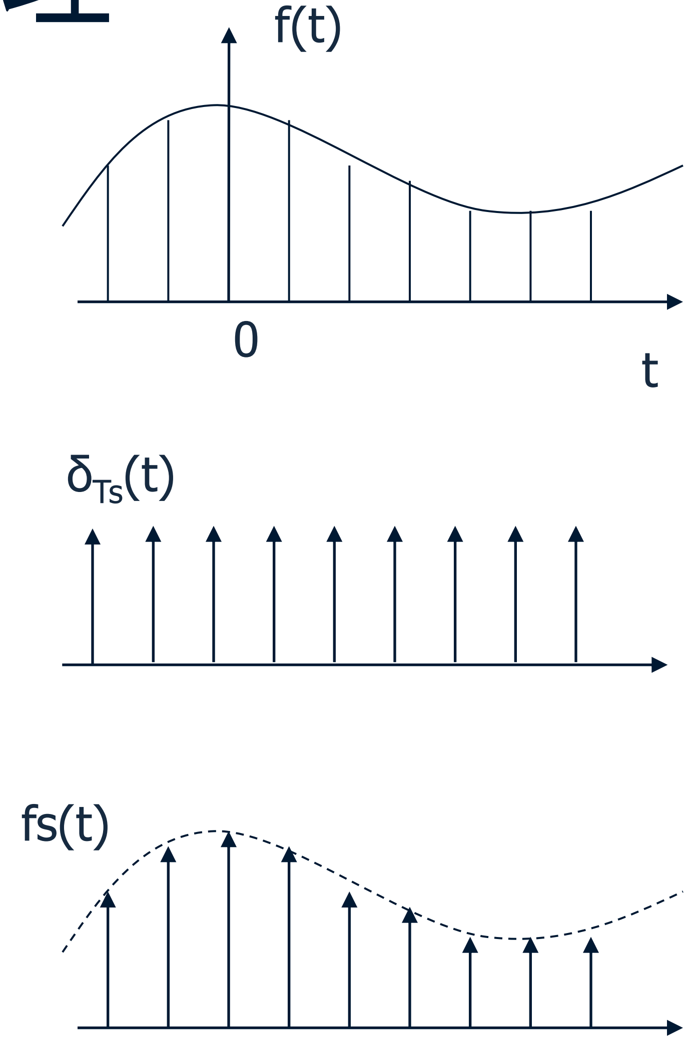
  - 多重時分割：パルスの間に別のパルスを挿入して別の信号を転送する。
- アナログ変調

  パルスのパラメタ（例：振幅）を信号の値に応じて連続して変化させる方式

標本化定理

- 時間領域における標本化定理
  - 情報を完全に伝送するための条件

標本化：信号f(t)の周波数スペクトルがω_mに帯域制限されている（<ω_m）間隔Tsで信号値をとること得られた値が標本値



- 標本化したパルス列を$f_s(t)$とする

$f_s(t)=\Sigma_{n=-\infty}^{\infty}\ f(nT_s)\delta(t-nT_s)$

- フーリエ変換で$f_s(t)$を解析する

$f_s(t)=\Sigma_{n=-\infty}^{\infty}\ f(nT_s)\delta(t-nT_s)$

$=f(t)\delta_{Ts}(t)$　ただし$\delta_{Ts}(t)=\Sigma_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$

  - $\delta_{Ts}(t)$のフーリエ変換と$f(t)$のフーリエ変換$F(\omega)$から$f_s(t)$を求める

$\delta_{Ts}(t)$のフーリエ変換

周期関数（周期Ts）、フーリエ級数に展開して

$\delta_{Ts}(t)=\Sigma_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t}$

$C_n=1/Ts \int_{-Ts/2}^{Ts/2}\delta_{Ts}(t)\, e^{-jn\omega_s t}dt=1/Ts$

$\omega_s=2\pi/Ts$

- $\delta_{Ts}(t) = 1/Ts\Sigma_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t}$

$e^{jn\omega_s t}$フーリエ変換?

$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$　　$F(t) \Leftrightarrow 2\pi\, f(-\omega)$

$\delta(t) \Leftrightarrow 1$　　$1 \Leftrightarrow 2\pi\, \delta(-\omega) = 2\pi\, \delta(\omega)$

$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$　　$f(t)\, e^{jn\omega_s t} \Leftrightarrow F(\omega - n\omega_s)$

- $1 \times e^{jn\omega_s t}$フーリエ変換: $2\pi\, \delta(\omega - n\omega_s)$

$\delta_{Ts}(t)$のフーリエ変換

$2\pi /Ts\Sigma_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) =$

$\omega_s\Sigma_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) = \omega_s\delta_{\omega s}(\omega)$

スペクトルは間隔ω_sのインパルス列

$f_s(t)=f(t)\delta_{Ts}(t)$のフーリエ変換が重畳積分定理によって得られる。

$$Fs(\omega)= 1/2\pi\ F(\omega) * [\omega_s\delta_{\omega s}(\omega)]$$

ただし、$F(\omega)$は$f(t)$のフーリエ変換

$$Fs(\omega)=1/2\pi \int F(\mu)\ \omega_s\Sigma_{n=-\infty}{}^{\infty}\ \delta(\omega-n\omega_s-\mu)d\mu$$

$$= 1/Ts\Sigma_{n=-\infty}{}^{\infty}\ F(\omega-n\omega_s)$$

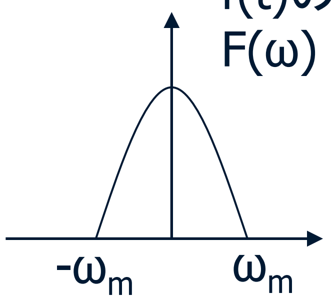
$$= 1/Ts(\ldots+F(\omega-2\omega_s)+ F(\omega-\omega_s)+F(\omega)+F(\omega+\omega_s)+ F(\omega+2\omega_s)+\ldots)$$

$$Fs(\omega)=1/Ts\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega-n\omega_s)$$

$$= 1/Ts(\ldots+F(\omega-2\omega_s)+ F(\omega-\omega_s)+F(\omega)+F(\omega+\omega_s)+ F(\omega+2\omega_s)+\ldots)$$

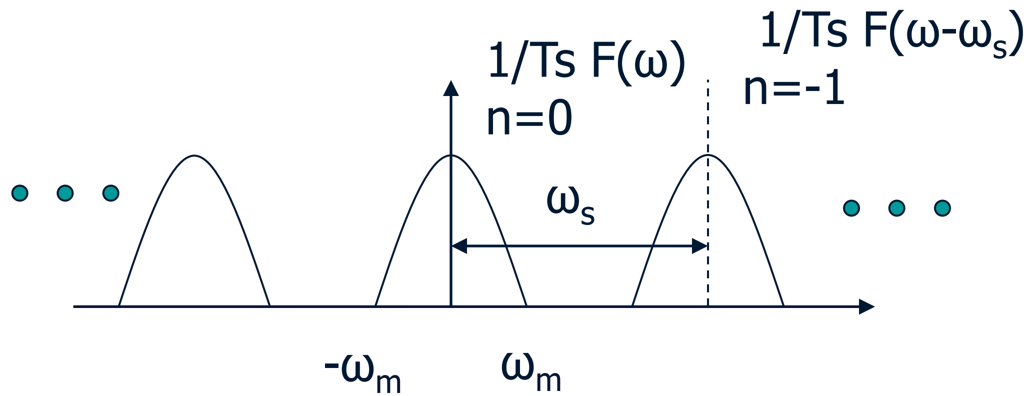
標本値fs(t)のスペクトルFs(ω)

f(t)のフーリエ変換
F(ω)

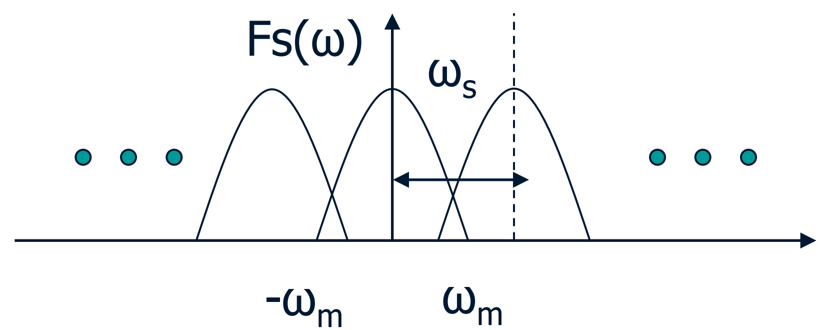


信号スペクトル

$\omega_s>2\omega_m$



$\omega_s<2\omega_m$



- Fs(ω)からF(ω)を得るために

  $\omega_s > 2\omega_m$（標本化定理）

  ナイキスト間隔、ナイキスト速度

  遮断周波数ω_b:　$\omega_m < \omega_b < \omega_s - \omega_m$
- 理想フィルターを用いてFs(ω)からF(ω)を抽出する

$$H(\omega) = \begin{cases} Ts & (|\omega| \leqq \omega_b) \\ 0 & (|\omega| > \omega_b) \end{cases}$$

$$F(\omega) = H(\omega)\,Fs(\omega)$$

- $F(\omega)=H(\omega)\,Fs(\omega)$

元の信号f(t)はf(nTs)から得られる。

- 時間領域で元の関数の表示(フーリエ逆変換)
  - 元の関数f(t)を標本値fs(t)で表す。

$H(\omega) \Leftrightarrow Ts\omega_b/\pi \;\; Sa(\omega_b t)$

と重畳積分定理を用いて

$$
\begin{aligned}
f(t) &= 2f_b Ts f_s(t) * Sa(\omega_b t) \\
&= 2f_b Ts \, \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} \; f(nT_s)\{\delta(t-nT_s) * Sa[\omega_b t]\} \\
&= 2f_b Ts \, \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) Sa[\omega_b (t-nTs)]
\end{aligned}
$$

遮断周波数を標本化周波数の半分にするとき

$(\omega_b=\omega_m=\omega_s/2)$

$$f(t) = \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) Sa[\omega_s (t-nTs)/2]$$

元の信号は標本値で一意決められる。

標本化定理: $\omega_s > 2\omega_m$

- $1/\sqrt{Ts}\ \ Sa[(\omega_s/2)(t-nTs)]$ 正規直交系であり、
  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt = Ts\Sigma_{n=-\infty}^{\infty} f(nTs)^2$ 成り立つ

以上の論議では現実と3点違う

- インパルスによる標本化はできない
- 多くの信号は時間制限信号であり、厳密に帯域制限信号ではない
- 理想フィルターH(ω)は実現できない
  - Guard bandで解決

周波数領域における標本化定理

- 帯域制限標本化定理と双対性

  帯域制限→時間制限

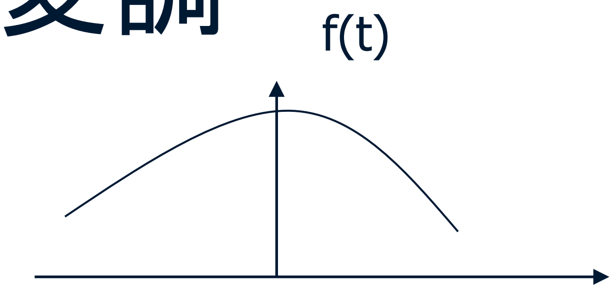
  時間領域での標本化→周波数領域での標本化

$F(\omega)=\Sigma_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0)\ Sa[(T/2)(\omega-n\omega_0)]$

$\omega_0=2\pi\ /T$

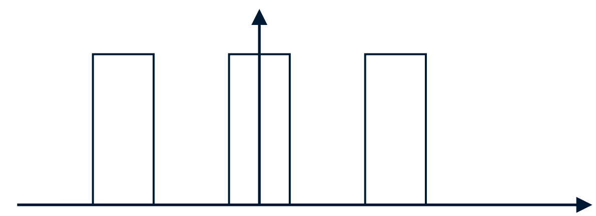
信号の継続時間：$-T/2,\ T/2$

パルス振幅変調

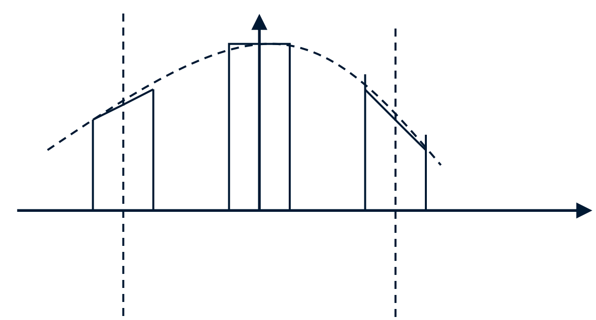


- パルス変調
- パルス振幅変調：標本値に応じてパルスの振幅を変化させる方式　PAM（Pulse Amplitude Modulation）

例としてパルスを方形波パルスとする

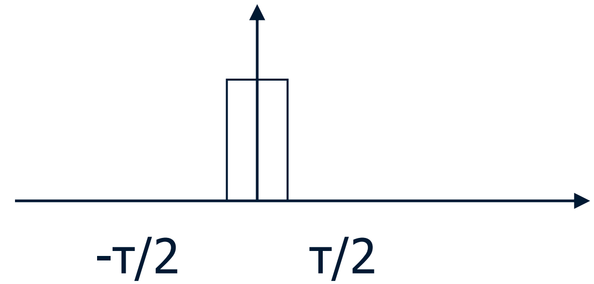


自然標本化



$G_T(t) = 1 \quad (|t| \leq \tau/2)$

$\qquad\qquad 0 \quad (|t| > \tau/2)$



繰り返したパルス列を$P_{Ts}(t)$とし

$P_{Ts}(t) = \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} G_T(t-nTs)$

変調波を$\varphi_{PAM}(t)$とし、

$\varphi_{PAM}(t) = f(t)\, P_{Ts}(t)$

Ts をナイキスト間隔（$1/2f_m$）以下にする必要がある

- PAM波の周波数スペクトル
  - $P_{Ts}(t)$のフーリエ変換を求める
  フーリエ級数に展開して

$$P_{Ts}(t)=\Sigma_{n=-\infty}^{\infty} G_\tau(t-nTs)$$

$$=\tau\ /Ts\Sigma_{n=-\infty}^{\infty} Sa(n\omega_s\tau\ /2)e^{jn\omega_s t}$$

$$P_{Ts}(\omega)= \tau\ /Ts\Sigma_{n=-\infty}^{\infty} Sa(n\omega_s\tau\ /2)2\pi\ \delta(\omega-n\omega_s)$$

（周波数推移性を用いて）

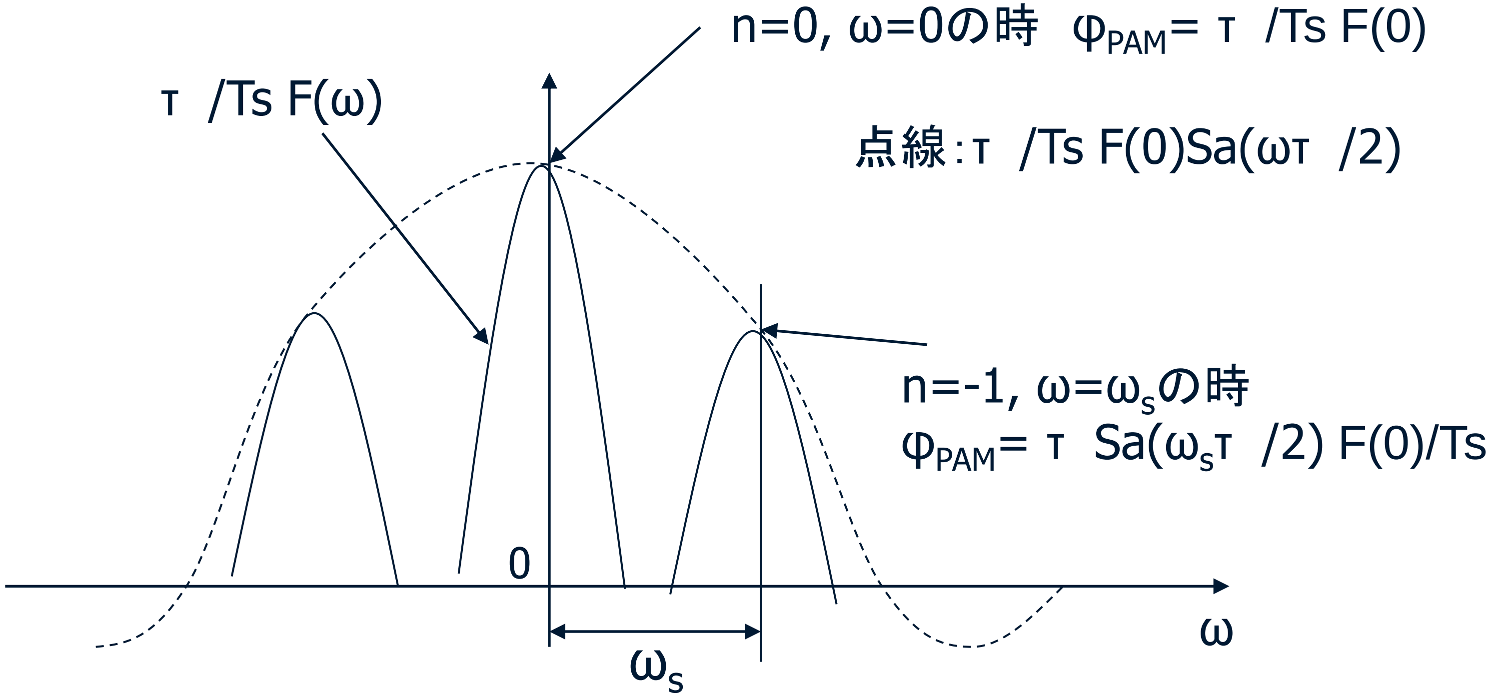
$\varphi_{PAM}(t)=f(t)\ P_{Ts}(t)$のフーリエ変換

$$\varphi_{PAM}(\omega) = 1/2\pi\ F(\omega) * P_{Ts}(\omega)$$

$$=\tau\ /Ts\Sigma_{n=-\infty}^{\infty} Sa(n\omega_s\tau\ /2)F(\omega-n\omega_s)$$

ただし　$F(\omega)$は$f(t)$のフーリエ変換

$$\varphi_{PAM}(\omega) = \tau/Ts \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa(n\omega_s\tau/2) F(\omega - n\omega_s)$$



包絡線は以下の式で決められる。

$G_\tau(t) \Leftrightarrow G(\omega) = \tau\ Sa(\omega\tau/2)$

- 任意のパルス波形をp_r(t)として

$\varphi_{PAM}(\omega) = 1/Ts \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} Pr(n\omega_s) F(\omega - n\omega_s)$

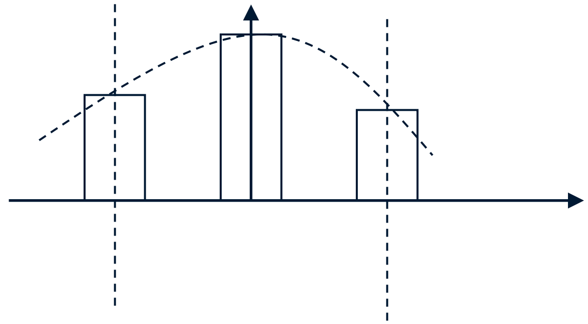
Pr(ω)はp_r(t)のフーリエ変換である

従って$\varphi_{PAM}(\omega)$の拡がり(帯域)はPr(ω)によって決定される。

- PAM波からf(t)の復調

低域フィルタにより基本スペクトルτ /TsF(ω)を取り出す

- f(t)の標本値にホールドするパルスのPAM波（瞬時標本化）



$\varphi_{PAM}(t) = \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} f(nTs)\, G_T(t-nTs)$

PAM波のフーリエ変換を求める

$G_T(t-nTs) = G_T(t) * \delta(t-nTs)$

を用いて

$\varphi_{PAM}(t) = \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} \{G_T(t) * [\, f(nTs)\, \delta(t-nTs)]\}$

$= G_T(t) * \{\Sigma_{n=-\infty}^{\infty} [\, f(nTs)\, \delta(t-nTs)]\}$

$= G_T(t) * \{f(t) \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nTs)\}$

フーリエ変換は（時間領域重畳定理によって）

$\varphi_{PAM}(\omega) = 1/Ts\, G(\omega)\, \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$

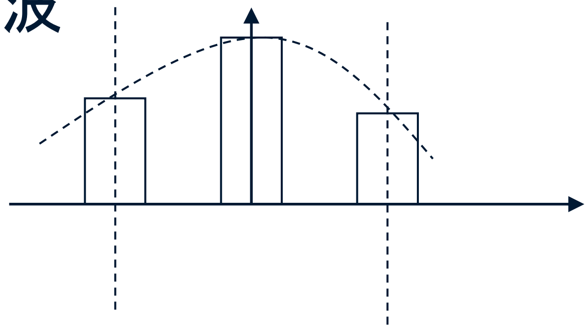
- f(t)の標本値にホールドするパルスのPAM波

$\varphi_{PAM}(\omega) = 1/T_s G(\omega) \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$

パルスが方形の場合

$\varphi_{PAM}(\omega) = \tau / T_s \, Sa(\omega\tau/2) \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$

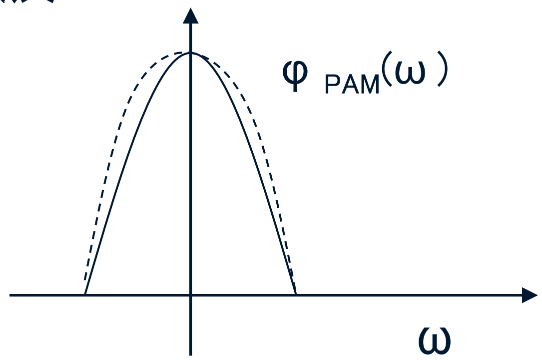
基本スペクトル: $\tau / T_s \, Sa(\omega\tau/2) F(\omega)$



- 自然標本化:f(t)に追従するパルスのPAM波

$\varphi_{PAM}(\omega) = \tau / T_s \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} Sa(n\omega_s\tau/2) F(\omega - n\omega_s)$

基本スペクトル: $\tau / T_s F(\omega)$ （点線）



歪み:アパーチャ効果

$\tau << 1/f_m$のとき無視できる

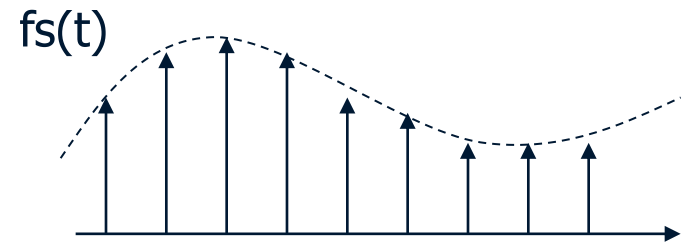
さもなければ、$G(\omega)^{-1}$の等化フィルターが必要

$$F_s(\omega)=1/T_s\Sigma_{n=-\infty}{}^{\infty}\ F(\omega-n\omega_s)$$

n=0（基本スペクトル）

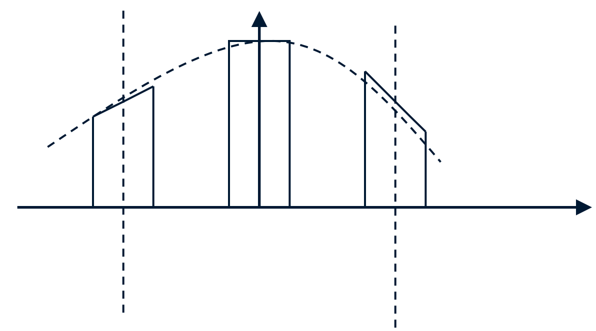
$$Fs(\omega)=\ 1/Ts\ F(\omega)$$

理想標本化



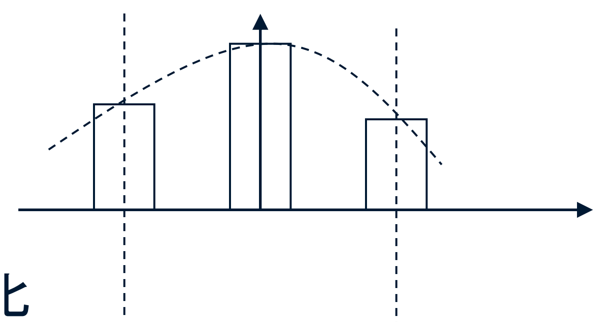
$\varphi_{\ PAM}(\omega\ )$
$=\tau/Ts\Sigma_{n=-\infty}{}^{\infty}\ Sa(n\omega_s\tau/2)F(\omega-n\omega_s)$
n=0
$\varphi_{\ PAM}(\omega\ )=\tau\ \ /Ts\ F(\omega)$

自然標本化



$\varphi_{\ PAM}(\omega\ )=\tau\ \ /Ts\ Sa(\omega\tau\ \ /2)\ \Sigma_{n=-\infty}{}^{\infty}\ F(\omega-n\omega_s)$
n=0
$\varphi_{\ PAM}(\omega\ )=\tau\ \ /Ts\ Sa(\omega\tau\ \ /2)\ F(\omega)$

瞬時標本化



- 2乗余弦パルス

$p_r(t) = [1+\cos(2\pi/\tau\ t)]/2 \quad (|t| \leq \tau/2)$

$\qquad 0 \qquad\qquad (|t| \geq \tau/2)$

スペクトル:

$P_r(\omega)=[\tau/2Sa(\omega\tau/2)]/[1-(\omega\tau/2\pi)^2]$

特徴:高周波成分が抑えられる。

■ 有限帯域でPAM波の伝送方式

有限帯域：$p_r(t)$のフーリエ変換$P_r(\omega)$のωが有限であること

$p_r(t)$時間域tは∞でなければならない

有限帯域で標本値を無歪みで伝送するため

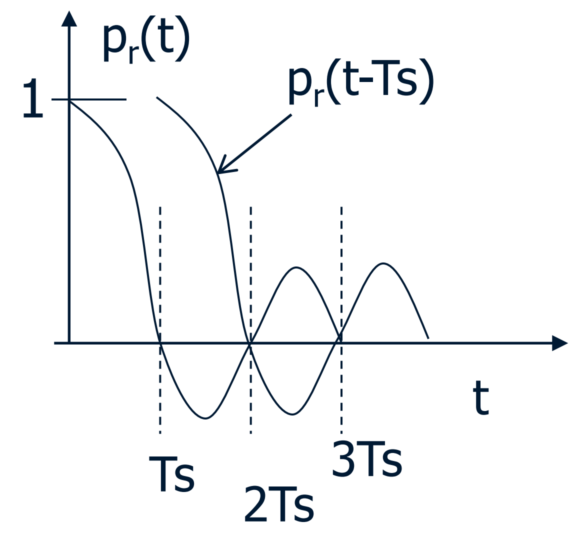
PAM波のパルスが満足する条件：

振幅

$p_r(0)=1$

$p_r(mTs)=0$　$m\neq 0$の整数の場合

2乗余弦の場合（右の図）



- 有限帯域でPAM波の伝送方式

標本値の無歪条件が満たされた前提で

$\varphi_{PAM}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nTs)\, p_r(t-nTs)$

t= mTsの時、$\varphi_{PAM}(mTs)$ の値

$\varphi_{PAM}(mTs) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nTs)\, p_r(mTs-nTs)$

$= f(mTs)$

標本値f(mTs) だけが正確に伝送される。

- 定理

$p_r(t) \Leftrightarrow P_r(\omega)$として

$\Sigma_{n=-\infty}^{\infty} P_r(\omega + n\omega_s) = Ts$ならば標本値の無歪条件が満足される

証明:

$p_r(t)=1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} P_r(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$

積分区間(-∞、∞)を $\{(2n-1)\omega_s,\ (2n+1)\omega_s\}$に分ける

$p_r(t)=1/2\pi \ \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} \int_{(2n-1)\omega s/2}^{(2n+1)\omega s/2} P_r(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$

$t=mTs$の時

$p_r(mTs)=1/2\pi \ \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} \int_{(2n-1)\omega s/2}^{(2n+1)\omega s/2} P_r(\omega)\, e^{j\omega mTs} d\omega$

$\omega - n\omega_s$ をω'にして→ω

$p_r(mTs)=1/2\pi \ \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\omega s/2}^{\omega s/2} P_r(\omega + n\omega_s)\, e^{j(\omega + n\omega s)mTs} d\omega$

条件を利用して

$p_r(mTs)= 1/2\pi \int_{-\omega s/2}^{\omega s/2} Ts\, e^{j\omega mTs} d\omega = Sa(m\pi)$

$Sa(m\pi)=1|m=0,\ 0|m\neq 0$

- 条件

$p_r(t) \Leftrightarrow P_r(\omega)$

$\Sigma_{n=-\infty}{}^{\infty} P_r(\omega + n\omega_s) = Ts$を満足する関数

2乗余弦スペクトルのパルス

$p_r(t)=\{\cos(\beta\pi\, t/Ts)\}/\{1-(2\beta t/Ts)^2\}Sa(\pi\, t/Ts)$

βはロールオフと呼ばれる。

帯域：$\omega_b=\pi\,/Ts(1+\beta)$

- 復調（ある時刻だけの値が正しい）

Ts秒ごとに同期

パルス時変調

- パルス時変調（PTM）
  PAM以外のパルス変調
  - パルス幅
  - パルス位置
  - パルス間隔

  標本値に応じて変化させる方式

■ パルス幅変調(PWM)

パルス幅τを信号に比例して変化させる。

$\tau = af(t)$

これを式

$P_{Ts}(t) = \tau / Ts \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa(n\omega_s \tau / 2) e^{jn\omega_s t}$に代入すると

$\varphi_{PWM}(t) = P_{Ts}(t)$

$= af(t)/Ts \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa(n\omega_s \tau / 2) e^{jn\omega_s t}$

基底帯域(n=0)を抽出して

$\varphi_{PWM}(t) = af(t)/Ts$ により元の信号f(t)が得られる。

- パルス位置変調(PPM)

パルスの基準位置からのずれをf(t)に比例して変化させる。

- パルス周波数変調

隣接パルス間の間隔の逆数をf(t)に比例して変化させる方式

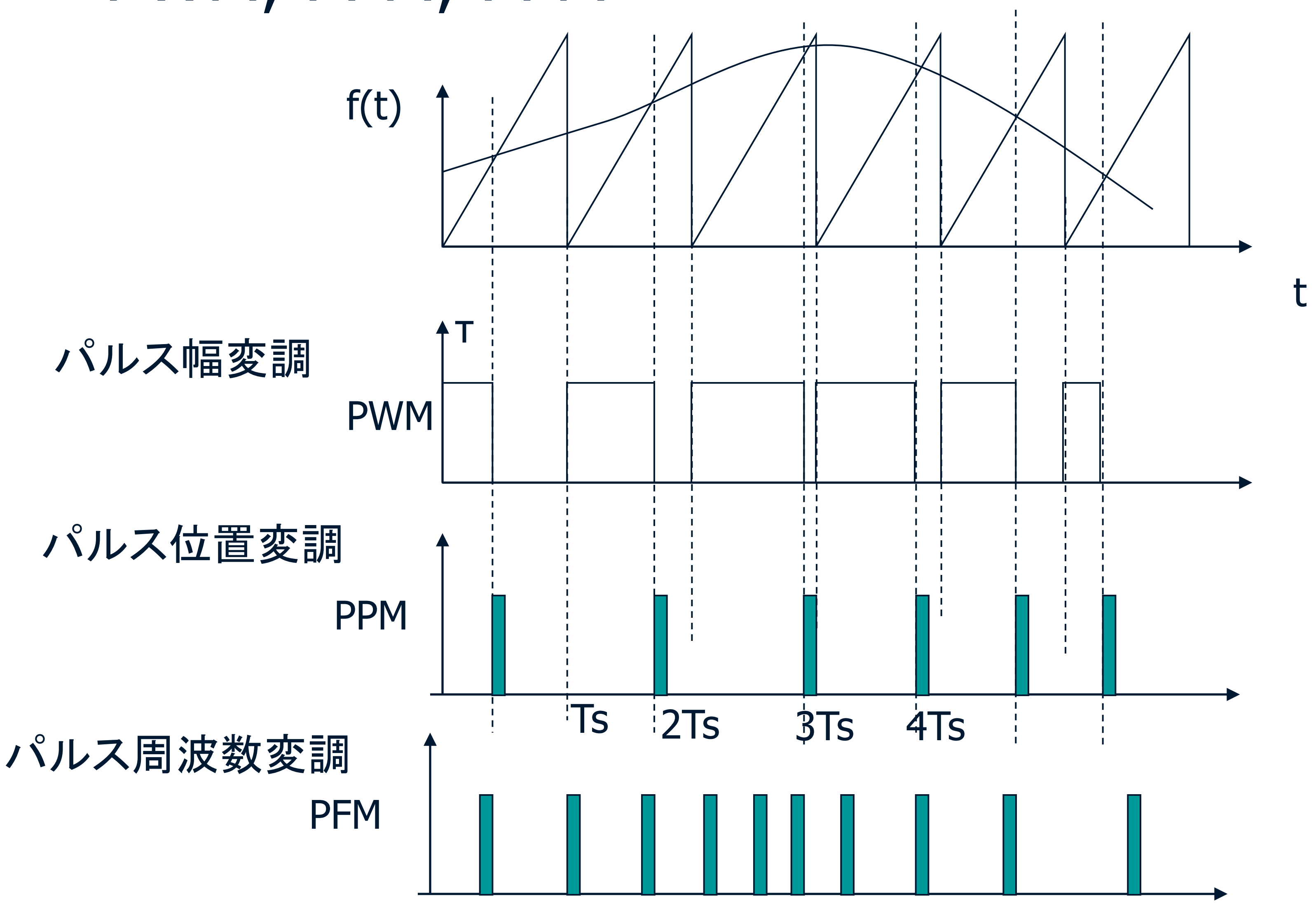
$1/T_s = af(t)$

$\varphi_{PFM}(t) = \tau \ af(t) \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} Sa(n\omega_s \tau \ /2) e^{jn\omega_s t}$

基底帯域(n=0)を抽出して

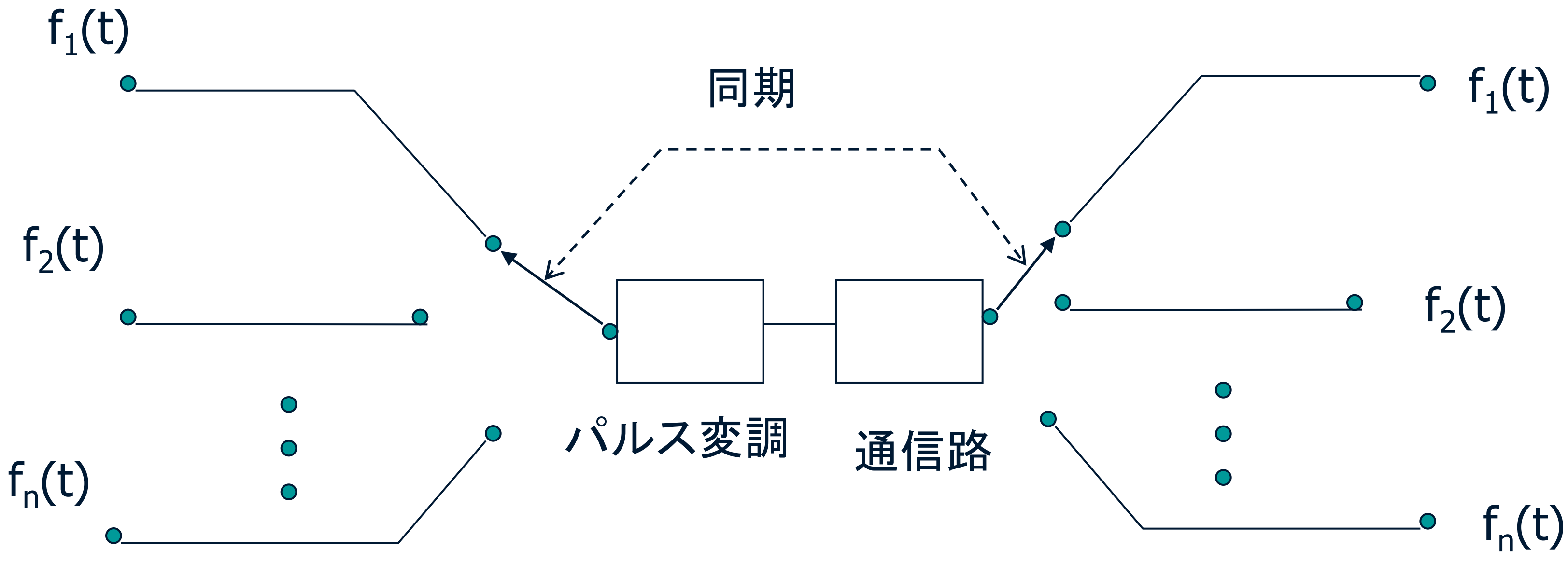
$\varphi_{PWM}(t) = \tau \ af(t)$ により元の信号f(t)が得られる。

- PWM, PPM, PFM



時分割多重通信

- パルスとパルスの間に別の通信路信号を挿入する方式



時分割多重通信の帯域$P_r(\omega)$

- 2乗余弦パルスにおいて$\beta=0$として

$\omega_b=\pi/Ts(1+\beta)$によって

$2\pi/Ts=\omega_s$

$\omega_s=2n\omega_m$、$Ts=2\pi/\omega_s=\pi/n\omega_m$を$\omega_b$の式に代入して

最小帯域：$\omega_b=n\omega_m$

- $\beta=1$の場合

  $\omega_s=4n\omega_m$

  最小帯域：$\omega_b=2n\omega_m$