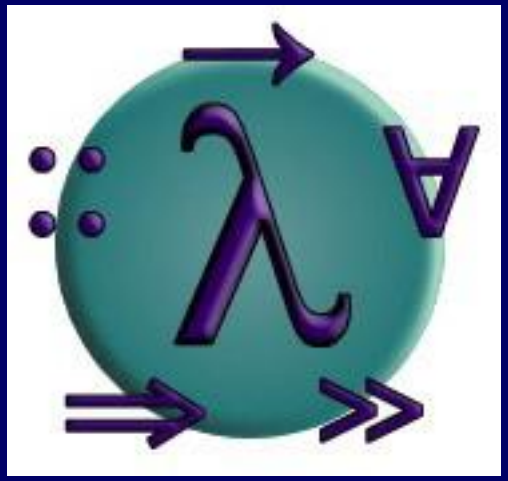
PROGRAMMING IN HASKELL



Chapter 6 - Recursive Functions

愛知県立大学 情報科学部 計算機言語論(山本晋一郎・大久保弘崇、2011年)講義資料。
オリジナルはhttp://www.cs.nott.ac.uk/~gmh/book.htmlを参照のこと。

イントロダクション

これまで見てきたように、多くの関数は他の関数を利用して定義できる

```
factorial  :: Int → Int
factorial n = product [1..n]
```

factorial は、任意の整数 n を、
1 から n の整数の積に写像する

式は、関数をその引数に適用する手続きにより、段階的に評価される

例:

```
  factorial 4
=
  product [1..4]
=
  product [1,2,3,4]
=
  1*2*3*4
=
  24
```

再帰関数(Recursive Functions)

Haskell では、自分自身を用いて関数を定義できる。
そのような関数を再帰的(recursive)と呼ぶ。

```
factorial 0     = 1
factorial n     = n * factorial (n-1)
n+kパターン: factorial (n+1) = (n+1) * factorial n
```

factorial は 0 を 1 に写像し、その他の正の整数を、
その値×1つ小さい値のfactorial に写像する

For example:

```
  factorial 3
=
  3 * factorial 2
=
  3 * (2 * factorial 1)
=
  3 * (2 * (1 * factorial 0))
=
  3 * (2 * (1 * 1))
=
  3 * (2 * 1)
=
  3 * 2
=
  6
```

注意:

- factorial 0 = 1 は 1 が乗法の単位元なので適切である: 1*x = x = x*1

- 0 より小さい整数に対して、基底ケースに到達できないため発散する:

```
> factorial (-1)

Error: Control stack overflow
```

再帰が役に立つ理由

- factorial のように、他の関数(例えば product)を利用して定義するとより簡潔に定義できる関数もある
- しかし、以降の章で分かるように、自分自身を利用して自然に定義できる関数も多い
- 再帰を用いて定義した関数の性質は、単純かつ強力な数学的帰納法を用いて証明できる(13 章)

リストに対する再帰

再帰は、整数だけに限られるのではなく、リスト関数にも使える

```
product        :: [Int] → Int
product []      = 1
product (n:ns) = n * product ns
```

product は空リストを 1 に写像し、非空リストを、
先頭要素 × 残りのリストのproduct に写像する

For example:

```
  product [2,3,4]
=
  2 * product [3,4]
=
  2 * (3 * product [4])
=
  2 * (3 * (4 * product []))
=
  2 * (3 * (4 * 1))
=
  24
```

product と同じ再帰パターンで、リストの長さを返す関数を定義する

```
length        :: [a] → Int
length []      = 0
length (_:xs) = 1 + length xs
```

length は空リストを 0 に写像し、非空リストを、
残りのリストのlengthより1つ大きな値 に写像する

For example:

```
  length [1,2,3]
=
  1 + length [2,3]
=
  1 + (1 + length [3])
=
  1 + (1 + (1 + length []))
=
  1 + (1 + (1 + 0))
=
  3
```

同じ再帰パターンで、リストを反転する関数を定義する

```
reverse          :: [a] → [a]
reverse []        = []
reverse (x:xs) = reverse xs ++ [x]
```

reverse は空リストを空リストに写像し、非空リストを、
(残りのリストのreverse)と(先頭要素だけのリスト)
を連結したリスト に写像する

For example:

```
  reverse [1,2,3]
=
  reverse [2,3] ++ [1]
=
  (reverse [3] ++ [2]) ++ [1]
=
  ((reverse [] ++ [3]) ++ [2]) ++ [1]
=
  (([] ++ [3]) ++ [2]) ++ [1]
=
  [3,2,1]
```

複数の引数

複数の引数を取る関数も再帰的に定義できる
例えば:

- 2 つのリストの要素同士を組にする:
  Zipping the elements of two lists:

```
zip                     :: [a] → [b] → [(a,b)]
zip []     _             = []
zip _      []            = []
zip (x:xs) (y:ys) = (x,y) : zip xs ys
```

- リストの先頭から n 要素を取り除く:

```
drop             :: Int → [a] → [a]
drop 0 xs         = xs
drop n []         = []
drop n (_:xs) = drop (n-1) xs
n+kパターン: drop (n+1) []     = []
             drop (n+1) (_:xs) = drop n xs
```

- 2 つのリストを結合する:

```
(++)             :: [a] → [a] → [a]
[]      ++ ys = ys
(x:xs) ++ ys = x : (xs ++ ys)
```

クイックソート

整数リストを整列するクイックソートのアルゴリズムは、2 つの規則で定式化される:

- 空リストはソート済み
- 非空リストのソートは以下の 3 つのリストを連結したリスト
  - (残りのリストで先頭要素以下の要素)をソートしたリスト
  - 先頭要素のみのリスト
  - (残りのリストで先頭要素より大きな要素)をソートしたリスト

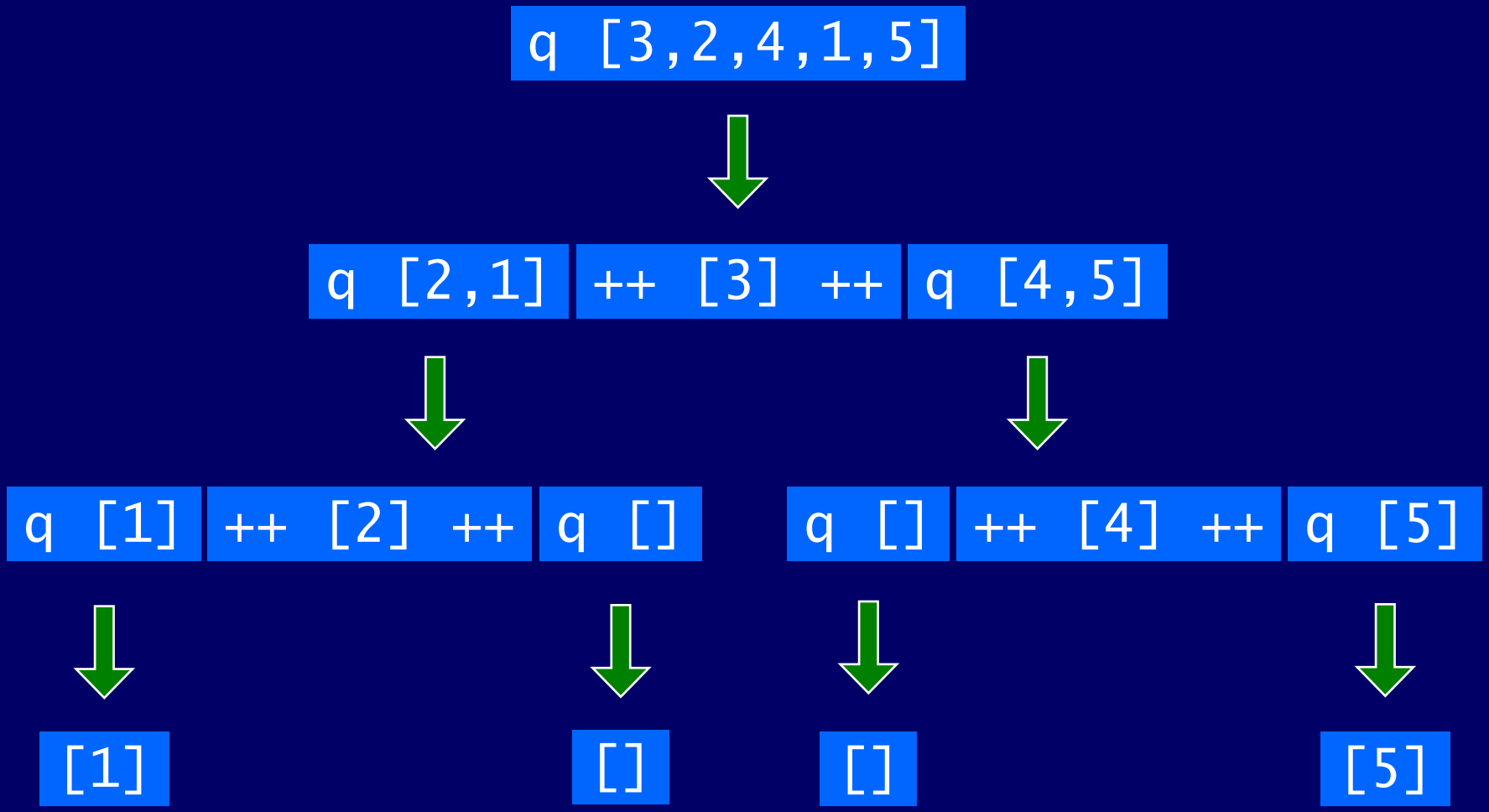
再帰を用いて仕様を直接的に実装に変換できる:

```
qsort          :: [Int] → [Int]
qsort []        = []
qsort (x:xs) =
   qsort smaller ++ [x] ++ qsort larger
   where
      smaller = [a | a ← xs, a ≤ x]
      larger  = [b | b ← xs, b > x]
```

注意:

- 他のプログラミング言語と比べて、おそらく最も簡潔な実装!

例 (qsort を q と省略):



相互再帰

- 2 つ以上の関数が、お互いを参照し合う
  - ```
    even, odd :: Int -> Bool
    even 0 = True
    even n = odd (n - 1)

    odd 0 = False
    odd n = even (n - 1)
    ```
  - 実際の定義(上の定義は非効率)
    ```
    even, odd :: (Integral a) => a -> Bool
    even n = n `rem` 2 == 0
    odd n  = not (even n)
    ```

rem は習っていないので mod と考える
    ```

再帰の秘訣(product)

- 型を定義する(数値リストの要素の積を求める)
```
product :: [Int] -> Int
```
- 場合分けをする
```
product []     =
product (n:ns) =
```
- 簡単な方を定義する
```
product []     = 1
product (n:ns) =
```
- 複雑な方を定義する
```
product []     = 1
product (n:ns) = n * product ns
```
- 一般化し単純にする
```
product :: Num a => [a] -> a
```

再帰の秘訣(drop)

- 型を定義する(リストの先頭から n 要素を取り除く)
```
drop :: Int -> [a] -> [a]
```
- 場合分けをする
```
drop 0 []     =          drop n []     =
drop 0 (x:xs) =          drop n (x:xs) =
```
- 簡単な方を定義する
```
drop 0 []     = []
drop 0 (x:xs) = x:xs
drop n []     = []
```
drop 0 xs = xs

省略すれば実行時エラー

- 複雑な方を定義する
```
drop n (x:xs) = drop (n-1) xs
```
drop n (_:xs) = ...

- 一般化し単純にする
```
drop :: Integral b => b -> [a] -> [a]
```

まとめ(6章)

- 再帰関数
  - 自然な定義
  - 数学的帰納法との好相性

```
factorial 0 = 1
factorial n = n * factorial (n-1)
```

- 相互再帰: 2 つ以上の関数が、お互いを参照し合う
- リストに対する再帰

```
product []     = 1
product (n:ns) = n * product ns
```

- 再帰の秘訣: 5 段階の工程
  型定義、場合分け、基底部、再帰部、一般化

問題

- product に関する再帰の秘訣(6.6節、p.66)において、product [] = 1 と定義する理由を、”1 は乗法の単位元だから” としている。これを解説せよ。